جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف السادس العلمي

المؤلفون

د. رحيم يونس كرو
د. طارق شعبان رجب
محمد عبد الغفور الجواهري
منعم حسين التميمي
يوسف شريف المعمار
جعفر رضا هاشم الزبيدي

الطبعة الاولى
١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

المشرف العلمي على الطبع: د.طارق شعبان رجب الحديثي

المشرف الفني على الطبع : محمد سعدي عزيز العبيدي

تصميم

زيد سعد عبد الكريم

فرح جعفر منشد

محمد سعدي عزيز

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق ببغداد ٨٥٥ لسنة ٢٠١٠

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مقدمة

لقد ظهرت في الكثير من دول العالم المتقدم مناهج حديثة في الرياضيات، وطرائق جديدة لتناولها كانت سبباً في حركة ديناميكية فعّالة أثرت في العملية التعليمية في المدارس والجامعات، وأحدثت فيها تطويراً جذرياً، وعليه أصبح من الضروري أن يلتحق العراق بهذا الركب وان يسارع في العمل لتطوير مناهج التعليم واساليبه وخاصة في الرياضيات التي تلعب دوراً طليعياً في إرساء دعائم الحضارة والمدنية، فهناك علاقة طردية بين احتياجات التنمية الصناعية والزراعية والمدنية، والتكنولوجيه والاقتصادية بصفة خاصة وبين مناهج الرياضيات في المؤسسات التعليمية بمختلف مستوياتها .

وفي ضوء خطة تطوير المناهج الدراسية عامة ومناهج الرياضيات خاصة تم تأليف هذا الكتاب الذي هو آخر حلقة من سلسلة الرياضيات قبل الجامعية، اذ تقع مادة هذا الكتاب في ستة فصول، تناول الفصل الاول الاعداد المركبة، والعمليات عليها وايجاد الجذور وخواصها ، وحل معادلات من الدرجة الثانية في مجموعة الاعداد المركبة، والاحداثيات القطبية واخيراً مقياس العدد المركب وسعته وكتابته بدلالتيهما .

اما الفصل الثاني فقد احتوى على القطوع المخروطية متضمنة القطوع المخروطية (المكافيء، الناقص، الزائد) والمعادلة القياسية لكل منها في حالات مختلفة، والاختلاف المركزي لكل قطع مخروطي .

واشتمل الفصل الثالث على المشتقات العليا للدوال القابلة للاشتقاق والمعدّلات الزمنية **Related Rates** والقيم العظمى والصغرى المحلية ونظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة والتقريب باستخدامها، والتقعر والتحدب ورسم بيان بعض كثيرات الحدود والحدوديات النسبية، واشتقاق الدوال الاسية واللوغارتمية.

أما الفصل الرابع فقد احتوى على موضوع التكامل وتطبيقاته ، اذ تم التطرق الى التجزئة المنتظمة ومجموع ريمان لكن بصورة مبسطة وعن طريق الامثلة بهدف التوصل الى النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل.

ثم التركيز على ايجاد تكاملات الدوال الجبرية واللوغارتمية والاسية والدائرية وايجاد المساحة بين منحنيين وبين منحني ومحور السينات وحجوم المجسمات الدورانية واحتوى الفصل الخامس على موضوع المعادلات التفاضلية والذي اقتصر على المفاهيم الخاصة بالمعادلات التفاضلية (الرتبة، الدرجة، الحل).

ولم يركز عند حل المعادلات التفاضلية الا على فصل المتغيرات، والمعادلات المتجانسة.

اما الفصل الاخير فقد تضمن تكملة لما درسه الطالب في الصف الخامس العلمي من مادة الهندسة المجسمة والمتعلقة بالزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة ومفاهيم الاسقاط العمودي والمبرهنات المتعلقة بهذه الموضوعات كما اشتمل هذا الفصل على مساحات وحجوم بعض المجسمات .

وقد روعي في هذا الكتاب وجود قدر كاف من التطبيقات الحياتية والفيزيائية والامثلة والمسائل والتمرينات المنوعة ، وتوخينا جهد امكاننا ان تترابط موضوعات هذا الكتاب مع كتب الرياضيات للصفوف التي سبقته ومع ما يدرسه الطلبة في دراستهم اللاحقة فضلاً عن مراعاة الفروق الفردية بين الطلبة، آملين ان نكون قد وفقنا في ذلك كله ، ومرحبين بكل نقد بناء من الطلبة واولياء امورهم او مدرسيهم او من ذوي الاختصاص والاهتمام لإثراء الكتاب وتطويره

والله ولي التوفيق

المؤلفون

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

1

الفصل الاول

Chapter One

الاعداد المركبة Complex Numbers

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية.

[1-2] العمليات على مجموعة الاعداد المركبة.

[1-3] مرافق العدد المركب.

[1-4] الجذور التربيعية للعدد المركب.

[1-5] حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$.

[1-6] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

[1-7] التمثيل الهندسي للاعداد المركبة.

[1-8] الصورة القطبية للعدد المركب.

[1-9] مبرهنة ديمواڤر.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الجزء الحقيقي للعدد R (z):z	R(z) = x = r cos θ
الجزء التخيلي للعدد I (z): z	I (z) = y = r sin θ
سعة العدد المركب z	arg (z) = θ
مقياس العدد المركب z	r = ‖z‖ = mod z
الطرف الايسر	LHS
الطرف الايمن	RHS

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الصفوف السابقة حل المعادلة الخطية (Linear Equation)، وعرفنا انه يوجد حل واحد في مجموعة الاعداد الحقيقية لاية معادلة خطية.

وعند دراستنا للمعادلة التربيعية تبين أنه لنوع معين منها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية، ونوع آخر لا يوجد لها حل في هذه المجموعة، مثل المعادلات: $(x^2 + 1 = 0)$ ، $(x^2 + 4x + 5 = 0)$ وكما تعلمت ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها $(b^2 - 4ac)$ عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية.

ان ظهور مثل هذه المعادلات في العديد من التطبيقات الفيزياوية والهندسية ادى الى الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة اوسع منها هي مجموعة الاعداد المركبة والتي سوف تكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.

إننا عندما نريد حل المعادلة $(x^2+1=0)$ أو $(x^2=-1)$ لانجد عدداً حقيقياً مربعه يساوي (-1) لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو غير حقيقي ونرمز له بالرمز (i) ويسمى العدد التخيلي (Imaginary Number) وهو ليس من الاعداد التي تقرن مع العد أو القياس.

إن العدد (i) يحقق الخواص الجبرية للاعداد الحقيقية ما عدا خاصية الترتيب، ولهذا نستطيع حساب قوى (i) كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$$
$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^{27} = i^{26} . i = (i^2)^{13} . i = (-1)^{13} . i = -i$$
$$i^{81} = i^{80} . i = (i^2)^{40} . i = (-1)^{40} . i = 1 . i = i$$
$$i^{-7} = (i)^{-8} . i = (i^2)^{-4} . i = (-1)^{-4} . i = i$$
$$i^{-15} = i^{-16} . i = (i^2)^{-8} . i = (-1)^{-8} . i = i$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وبصورة عامة يكون

$i^{4n+r} = i^r$, $n \in I$, $r = 0, 1, 2, 3$ حيث

وهذا يعني انه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة { 1, −1 , i, − i}

حيث نقسم أس (i) على (4) والباقي هو الأس الجديد الى (i) .

فمثلاً : $i^{25} = i$ لأن ناتج قسمة 25 على 4 يساوي 6 والباقي 1 .

$i^{99} = i^3 = -i$ لأن ناتج قسمة 99 على 4 يساوي 24 والباقي 3 .

مثال− 1−

اكتب ما يلي في ابسط صورة :

(a) i^{16} (b) i^{58} (c) i^{93} (d) i^{-13}

الحل :

(a) $i^{16} = i^{4(4)+0} = i^0 = 1$

(b) $i^{58} = i^{4(14)+2} = i^2 = -1$

(c) $i^{93} = i^{4(23)+1} = i^1 = i$

(d) $i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

ملاحظة

يمكننا كتابة الجذور لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i, فمثلاً:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\,i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5\,i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-15} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{15}\,i$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وبصورة عامة يكون

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\ .\ \sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i \quad , \forall\ a \geq 0$$

والآن بعد أن تعرفنا على العدد التخيلي ماذا نسمي العدد (a+bi) حيث a عدد حقيقي، b عدد حقيقي، $i = \sqrt{-1}$ ؟

تعريف [1-1] Definition

يقال للعدد $c = a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ عددٌ مركبٌ (Complex Number)، يسمى a جزؤه الحقيقي(Real Part) ويسمى b جزؤه التخيلي (Imaginary Part). ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة a +bi الصيغة العادية أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

ملاحظة

ان اي عدد مركب $c = a + bi$ يمكن جعله مناظراً للزوج المرتب الوحيد (a,b)

اذ أن b,a عددان حقيقيان، وبالعكس فالعدد الحقيقي a يمكن كتابته بالشكل a+0i أو (a,0). وان العدد i (Unit Imaginary Number) حيث ان: (0,1) $\Leftrightarrow$ i او i= 0+1i .

يقال للعدد bi $\Leftrightarrow$ (0 , b) عدد تخيلي بحت (pure Imaginary Number) ويقال للعدد a= a+0i $\Leftrightarrow$ (a , 0) إنه عدد حقيقي بحت (Pure Real Number) .

فالعدد 3i + −2 عدد مركب ، جزؤه الحقيقي −2 وجزؤه التخيلي 3

والعدد −2 عدد مركب ، جزؤه الحقيقي −2 وجزؤه التخيلي 0

اما العدد −3i فهي عدد مركب ، جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي −3

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 2- اكتب الأعداد الآتية على صورة $a+bi$:

a) -5 b) $\sqrt{-100}$ c) $-1-\sqrt{-3}$ d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

الحل :

a) $-5=-5+0\,i$

b) $\sqrt{-100}=\sqrt{100}\sqrt{-1}=10\,i=0+10\,i$

c) $-1\ -\sqrt{-3}=-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}=-1-\sqrt{3}\,i$

d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{25}\sqrt{-1}}{4}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$

بما ان كل عدد حقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a,0)$ اي يمكن كتابته على صورة عدد مركب جزؤه التخيلي صفر فان هذا يبين أن :

ملاحظة

مجموعة الاعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد المركبة اي ان $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

تعريف [1-2] Definition

اذا كان : $c_1=a_1+b_1i \ , \ c_2=a_2+b_2i$

فإنَّ : $c_1=c_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \ , \ b_1=b_2$

اي يتساوى العددان المركبان اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 3 –

جد قيمة كل من x , y اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي .

a) $2x-1+2i=1+(y+1)i$.

b) $3x+4i=2+8yi$

c) $(2y+1)-(2x-1)i=-8+3i$

الحل :

a) $\because\ 2x-1+2i=1+(y+1)i$

$\therefore\ 2x-1=1 \Rightarrow 2x=2$

$\Rightarrow\ x=1$

$2=y+1 \Rightarrow y=2-1$

$\therefore\ y=1$

b) $3x+4i=2+8yi$

$\therefore\ 3x=2\ ,\ 4=8y \Rightarrow$

$x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

c) $\because\ (2y+1)-(2x-1)i=-8+3i$

$\therefore\ 2y+1=-8\ ,\ -(2x-1)=3 \Rightarrow$

$2y=-9\ ,\ -2x=2 \Rightarrow$

$y=\frac{-9}{2}\ ,\ x=-1$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[1-2] العمليات على مجموعة الاعداد المركبة.

اولاً: عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة :

تعريف [1-3] Definition

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

وكما تعلم أن : $(b_1 + b_2) \in R$ ، $(a_1 + a_2) \in R$ لان مجموعة الاعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع .

$$\therefore \quad (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \in \mathbb{C}$$

اي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع.

مثال- 4-

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

a) $3+4\sqrt{2}i,\ 5-2\sqrt{2}i$

b) $3,\ 2-5i$

c) $1-i,\ 3i$

الحل :

$$a)(3+4\sqrt{2}i)+(5-2\sqrt{2}i)=(3+5)+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$$
$$=8+2\sqrt{2}i$$

$$b)(3)+(2-5i)=(3+0i)+(2-5i)$$
$$=(3+2)+(0-5)i=5-5i$$

$$c)(1-i)+3i=(1-i)+(0+3i)$$
$$=(1+0)+(-1+3)i=1+2i$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الجمع على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

فان :

(1) $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$ * الخاصية الابدالية . (Commutativity)

(2) $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$ * الخاصية التجميعية . (Associativity)

(3) $\forall\ c \in \mathbb{C},\ c = a+bi\ \ \exists\ -c \in \mathbb{C}$ * النظير الجمعي . (Additive Inverse)

حيث $-c = -a-bi$ يسمى $(-c)$ النظير الجمعي للعدد المركب c

(4) $e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ *العنصر المحايد الجمعي . Additive Identity يرمز له بالرمز e ويُعرف

مما سبق نستنتج أن $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة ابدالية (Commutative Group)

ملاحظة

ان طرح أي عدد مركب من آخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني.

مثال -5- جد ناتج :

$(7-13i) - (9+4i)$

الحل :

$(7-13i) - (9+4i)$

$= (7-13i) + (-9-4i)$

$= (7-9) + (-13-4)i$

$= -2 - 17i$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 6-

حل المعادلة :

$(2-4i)+x=-5+i$

حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :

$(2-4i)+x=-5+i$

باضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$ للطرفين $(2-4i)+(-2+4i)+x=(-5+i)+(-2+4i)$

$\therefore \quad x=(-5+i)+(-2+4i)$

$=(-5-2)+(1+4)i$

$x=-7+5i$

ثانياً: عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة :

لايجاد عملية ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما بصفتهما مقدارين جبريين ونعوض بدلاً من i^2 العدد (-1) كما يأتي :

اذا كان $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$ فان

$c_1 \cdot c_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$

$=a_1a_2++a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$

$=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2$

$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

ملاحظة

اذا كان $k \in R$, $c=a+bi$ فان

$kc=ka+kbi$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تعـريف [1-4] Definition

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان :

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

وكما تعلم : $(a_1 a_2 - b_1 b_2) \in R$ وان $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in R$ لان

R مغلق تحت عملية الضرب

لذلك فان $c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{C}$

أي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب .

مثال- 7-

جد ناتج كلا مما يأتي :

a) $(2-3i)(3-5i)$

b) $(3+4i)^2$

c) $i(1+i)$

d) $-\frac{5}{2}(4+3i)$

e) $(1+i)^2 + (1-i)^2$

الحل :

a) $(2-3i)(3-5i) = (6-15) + (-10-9)i$

$= -9 - 19i$

b) $(3+4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$

$= 9 + 24i - 16$

$= -7 + 24i$

أو $(3+4i)^2 = (3+4i)(3+4i) = (9 - 16) + (12+12)\, i = -7 + 24i$

c) $i(1+i) = i + i^2 = -1 + i$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

$$d)-\frac{5}{2}(4+3i)=-10-\frac{15}{2}i$$

$$e)(1+i)^2+(1-i)^2=(1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$$

$$= 2i + (-2i) = 0$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

* الخاصية الابدالية . (Commutativity)

(1) $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$

* الخاصية التجميعية . (Associativity)

(2) $c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$

* يتوفر العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Inverse) وهو

(3) $1 = (1+0i)$

* النظير الضربي (Multiplicative Inverse)

(4) $\forall c \neq (0+0i), \exists \frac{1}{c} \in \mathbb{C}$ بحيث $c \times \frac{1}{c} = (1+0i)$

اي ان لكل عدد مركب C عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة .

اي ان : $(\mathbb{C}-(0+0i), \times)$ زمرة ابدالية

اي ان : $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل يسمى حقل الاعداد المركبة

[1-3] مرافـــق العـدد المـركب Conjugate Number

تعـريف [1-5] Definition

مرافق العدد المركب $c=a+bi$ هو العدد المركب $\overline{c}=a-bi$ ، $\forall a, b \in R$

فمثلاً : $3+i$ هو مرافق العدد $3-i$ وبالعكس، وكذلك مرافق (i) هو $(-i)$ وبالعكس .

وان $5-4i$ مرافق $5+4i$ وبالعكس، وكذلك مرافق العدد 7 هو 7 وبالعكس.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ملاحظة يتضح من تعريف المرافق أنه يحقق الخواص الآتية:

1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$

2) $\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{c_2}$

3) $\overline{\overline{c}} = c$

4) $c \cdot \overline{c} = a^2 + b^2$ فان $c = a + bi$ اذا كان

5) $\overline{c} = c$ فان $c \in R$ اذا كان

6) $\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$: فتحقق من $c_2 = 1 + i$, $c_1 = 3 - 2i$ اذا كان

مثال – 8–

اذا كان $c_2 = 3 - 2i$, $c_1 = 1 + i$ فتحقق من :

(1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ (2) $\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{c_2}$

الحل :

(1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)}$

$= \overline{(4-i)} = 4+i$

$\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)+(3+2i) = 4+i$

$\therefore \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

(2) $\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3-2i+3i-2i^2} = \overline{5+i} = 5-i$

$\overline{c_1} \cdot \overline{c_2} = \overline{(1+i)} \ \overline{(3-2i)} = (1-i)(3+2i)$

$= (3+2)+(2-3)i = 5-i$

$\therefore \overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{c_2}$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 9- جد النظير الضربي للعدد $c = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

الحل: النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2-2i}$$

$$= \frac{1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

مثال- 10- اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$.

الحل:

$$\frac{3-2i}{i} = \frac{x+yi}{1-5i}$$

$$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$\therefore x = -17$$

$$y = 7$$

مثال- 11- اذا كان $c_1 = 3 - 2i$, $c_2 = 1 + i$ فتحقق من : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

الحل :

$$\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

$$= \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \overline{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i}$$

$$= \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

ملاحظة

لاجراء قسمة العدد المركب c_1 على العدد المركب c_2 حيث $c_2 \neq 0$ فاننا نضرب بسط المقدار $\frac{c_1}{c_2}$ ومقامه بمرافق المقام فيكون:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} \times \frac{\overline{c_2}}{\overline{c_2}}$$

مثال- 12- ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a+bi$:

a) $\frac{1+i}{1-i}$ (b) $\frac{2-i}{3+4i}$ (c) $\frac{1+2i}{-2+i}$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

الحل :

a) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$

b) $\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$

c) $\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\frac{-5i}{5}=-i=0-i$

ملاحظة

يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة a+bi وذلك :

$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$

مثال- 13- حلل كلاً من العددين 10 ، 53 الى حاصل ضرب عاملين من صورة a+bi حيث b,a عددين نسبيين .

الحل :

❃ $10=9+1$ او $10=1+9$

$=9-i^2$ $=1-9i^2$

$=(3-i)(3+i)$ $=(1-3i)(1+3i)$

❃ $53=49+4$ او $53=4+49$

$=49-4i^2$ $=4-49i^2$

$=(7-2i)(7+2i)$ $=(2-7i)(2+7i)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (1-1)

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

i^5 , i^6 , i^{124} , i^{999} , i^{4n+1} $\forall n \in N$, $(2+3i)^2 + (12+2i)$

$(10+3i)(0+6i)$, $(1+i)^4 - (1-i)^4$, $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$

$\frac{i}{2+3i}$, $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$, $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i}$, $(1+i)^3 + (1-i)^3$

2. جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية :

a) $y+5i = (2x+i)(x+2i)$

b) $8i = (x+2i)(y+2i)+1$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi) = (1+2i)^2$

d) $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

3. اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

4. حلل كلاً من الاعداد 85 ، 41 ، 125 ، 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة a+ bi حيث a, b عددان نسبيان .

5- جد قيمة x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان .

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-1] الجذور التربيعية للعدد المركب .

لقد تعلمت أنه اذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فانه يوجد عددان حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحقق كل منهما المعادلة $x^2 = a$ ويسمى $\pm\sqrt{a}$ الجذرين التربيعيين للعدد a . أما اذا كان $a = 0$ فان له جذر واحد هو 0 .
والآن سنتناول دراسة الجذور التربيعية للعدد المركب .

مثال -14- جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$.

الحل : نفرض ان الجذر التربيعي للعدد c هو $x + yi$

$$\therefore (x+yi)^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 8+6i \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2xy = 6 \Rightarrow y &= \frac{3}{x} \ldots\ldots(2) \end{aligned}\right\}$$ من تعريف تساوي عددين مركبين

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8$$

بضرب الطرفين في x^2 ينتج :

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Rightarrow$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$x^2 = -1$ (تهمل لان $x \in R$)

$x = \pm 3$ او $x^2 = -1$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x نحصل على :

$$y = \frac{3}{\pm 3}$$

$$\therefore y = \pm 1$$

x	3	-3
y	1	-1

$\therefore$ $c_1 = 3 + i$ و $c_2 = -3 - i$

أي أن جذري العدد c هما $3 + i$, $-3 - i$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 15-

جد الجذور التربيعية للاعداد : -25 ، -17 ، $-i$ ، $8i$

الحل :

a) $c^2 = -25$

$$c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25i} = \pm 5i$$

b) $c^2 = -17$

$$c = \pm\sqrt{-17}$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{17}\, i$$

c) نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-i$

$$\therefore (x+yi)^2 = -i$$

$$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$2xy = -1$$

$$\therefore y = \frac{-1}{2x} \ldots\ldots\ldots(2)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) بالمعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \Rightarrow$$

بضرب الطرفين في $4x^2$ ينتج :

$$4x^4 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$$

اما $x^2 = -\frac{1}{2}$ (يهمل لان $x \in R$)

او $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتعويض في (2) عن قيمة x نجد : $\therefore y = -\left(\frac{1}{\pm(2)\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$$= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ جذرا العدد $-i$ هما $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

d) نفرض ان $x+yi$ هو الجذر التربيعي للعدد $8i$

$\therefore (x+yi)^2 = 8i \Rightarrow$

$x^2+2xyi-y^2 = 8i$

$x^2-y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$x^2 - \frac{16}{x^2} = 0$

وبضرب الطرفين في x^2 ينتج :

$x^4 - 16 = 0 \Rightarrow$

$(x^2-4)(x^2+4) = 0 \Rightarrow$

اما $x^2 = -4$ (يهمل لان $x \in R$)

او $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x ينتج :

$y = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$

x	2	-2
y	2	-2

$\therefore$ جذرا العدد $8i$ هما $\pm(2+2i)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[1-5] حل المعادلة التربيعية في (ℂ) .

تعلمت من المرحلة المتوسطة ان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ وان $a, b, c \in R$ حلين يمكن ايجادهما بالدستور :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وعرفت أنه اذا كان المقدار المميز $b^2 - 4ac$ سالباً فانه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن يوجد لها حلان في مجموعة الاعداد المركبة .

مثال-16 حل المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الاعداد المركبة.

الحل : حسب القانون (الدستور) :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (4)(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2} \qquad = -2 \pm i$$

اي ان للمعادلة جذرين هما $-2 + i$, $-2 - i$

ملاحظة

من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها حقيقية هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ومجموع الجذرين هو : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين هو : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ويمكن الافادة من هذه الخواص كما يأتي :

اولاً : اذا كان $x + yi$ احد جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0$ فان $x - yi$ هو الجذر الآخر لها .

ثانياً : بقسمة طرفي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ على $a \neq 0$ نحصل على

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ والتي هي عبارة عن :

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مثال – 17 – جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm (2+2i)$.

الحل : مجموع الجذرين هو : $(2-2) + (2-2)i = 0$

حاصل ضرب الجذرين هو :

$$(2+2i)(-2-2i) = -(2+2i)^2$$
$$= -(4 + 8i + 4i^2)$$
$$= -8i$$

$\therefore$ المعادلة التربيعية هي :

$$x^2 - 0x + (-8i) = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - 8i = 0 \Rightarrow x^2 = 8i$$

مثال – 18 – كوِّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3-4i$.

الحل : بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

$\therefore$ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+4i$

مجموع الجذرين $= 6$ وحاصل ضربهما $= 25$

$\therefore$ المعادلة هي :

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (2-1)

1. حل المعادلات التربيعية الآتية وبين اي منها يكون جذراها مترافقين؟

a) $z^2 = -12$

b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

d) $z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

e) $4z^2 + 25 = 0$

f) $z^2 - 2z\,i + 3 = 0$

2. كون المعادلة التربيعية التي جذراها m,L حيث:

a) $m = 1 + 2i$ $\quad L = 1 - i$

b) $m = \dfrac{3 - i}{1 + i}$, $L = (3 - 2i)^2$

3. جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية:

a) $-8i$

b) $7 + 24i$

c) $\dfrac{4}{1 - \sqrt{3}\,i}$

4. ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو:

a) i

b) $5 - i$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + 3i}{4}$

5- اذا كان $i + 3$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة a؟ وما قيمة الجذر الاخر؟

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[6-1] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

ليكن $z^3=1$ ومنها :

$$z^3-1=0 \Rightarrow$$
$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow$$ أما

$$z=1 \quad \text{او} \quad z^2+z+1=0$$

ولحل المعادلة $z^2+z+1=0$ نستخدم الدستور :

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1-(4)(1)(1)}}{(2)(1)}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اي ان الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي :

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ان مربع أي من الجذرين التخيليين يساوي الجذر التخيلي الاخر وهما مترافقان (تحقق من ذلك)

فاذا رمزنا لاحد الجذرين التخيليين بالرمز ω فان الجذر الآخر هو ω^2 .

ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :

$$1,\ \omega\ ,\ \omega^2$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وهذه الجذور تحقق الخواص الآتية :

1) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

2) $\omega^3 = 1$

ومن الخاصية الاولى نحصل على الاتي :

1) $\omega + \omega^2 = -1$ (2) $1 + \omega = -\omega^2$ (3) $1 + \omega^2 = -\omega$

4) $\omega = -1 - \omega^2$ (5) $\omega^2 = -1 - \omega$ (6) $1 = -\omega - \omega^2$

7) $\omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}\, i$

ومن الخاصية الثانية يمكن التوصل الى النتائج الاتية :

$$\omega^4 = \omega^3 . \omega = 1 . \omega = \omega$$

$$\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3 . \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

$$\omega^5 = \omega^3 . \omega^2 = 1 . \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^2} = \frac{1}{1 . \omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

$$\omega^6 = (\omega^3)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\omega^{-6} = \frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{1} = 1$$

وبالاستمرار على هذا النحو فان قوى (ω) لاعداد صحيحة تأخذ احدى القيم :

$$1, \omega , \omega^2$$

وتتكرر هذه القيم كلما زادت الاسس على التوالي بمقدار (3) .

بمعنى أن :

$$\omega^{3n+r} = \omega^r$$

حيث n عدد صحيح , $r = 0, 1, 2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال– 19–

جد ناتج : ω^{33} ، ω^{-58} ، ω^{25}

الحل :

$$\omega^{33} = \omega^{3(11)+0} = \omega^0 = 1$$

$$\omega^{25} = \omega^{3(8)+1} = \omega^1 = \omega$$

$$\omega^{-58} = \omega^{3(-20)+2} = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

بمعنى أن :

باقي قسمة أ س (ω) على (3) هو الاس الجديد الى ω

مثال– 20–

اثبت ان :

a) $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

b) $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$

الحل :

a) $\omega^7 + \omega^5 + 1 = \omega^6 . \omega + \omega^3 . \omega^2 + 1$ (حسب الخاصية الاولى)

$$= \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

b) $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = [5 + 3(\omega + \omega^2)]^2$

$$= [5 - 3]^2 = (2)^2 = 4$$

كذلك

$$-4(2 + \omega + 2\omega^2)^3$$

$$= -4[2(1 + \omega^2) + \omega]^3$$

$$= -4[-2\omega + \omega]^3 = -4\ [-\omega]^3$$

$$= -4(-1) = 4$$

$$\therefore (5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 21-

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها

a) $1-i\omega^2$, $1-i\omega$

b) $\frac{2}{1-\omega}$, $\frac{2}{1-\omega^2}$

الحل :

a)

مجموع الجذرين

$$(1-i\omega^2)+(1-i\omega)$$
$$=2-i(\omega^2+\omega)$$
$$=2+i$$

حاصل ضرب الجذري

$$(1-i\omega^2)(1-i\omega)$$
$$=1-i\omega-i\omega^2+i^2\omega^3$$
$$=1-i(\omega+\omega^2)-1\times1$$
$$=i$$

∴ المعادلة هي :

$$x^2-(2+i)x+i=0$$

b)

مجموع الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega}+\frac{2}{1-\omega^2}$$
$$\frac{2-2\omega+2-2\omega^2}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$\frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2-(\omega+\omega^2)}$$
$$=\frac{6}{3}=2$$

حاصل ضرب الجذري

$$\frac{2}{1-\omega}\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$$
$$\frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$\frac{4}{3}$$

∴ المعادلة هي :

$$x^2-2x+\frac{4}{3}=0$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (3-1)

1. احسب الجذور التكعيبية في $\mathbb{C}$ لكل من

a) $8i$ b) 8

2. اكتب المقادير الاتية في ابسط صورة:

a) ω^{64} b) ω^{-32} c) $\dfrac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}$ d) $(1+\omega^2)^{-4}$ e) ω^{9n+5} حيث $n \in N$

3. كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $1+\omega^2$, $1+\omega$

b) $\dfrac{\omega}{2-\omega^2}$, $\dfrac{\omega^2}{2-\omega}$

c) $\dfrac{3i}{\omega^2}$, $\dfrac{-3\omega^2}{i}$

4. اذا كان : $z^2+z+1=0$ فجد قيمة : $\dfrac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

5. اثبت ان :

a) $\left(\dfrac{1}{2+\omega}-\dfrac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\dfrac{2}{3}$

c) $\left(1-\dfrac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\dfrac{5}{\omega}\right)=18$ d) $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

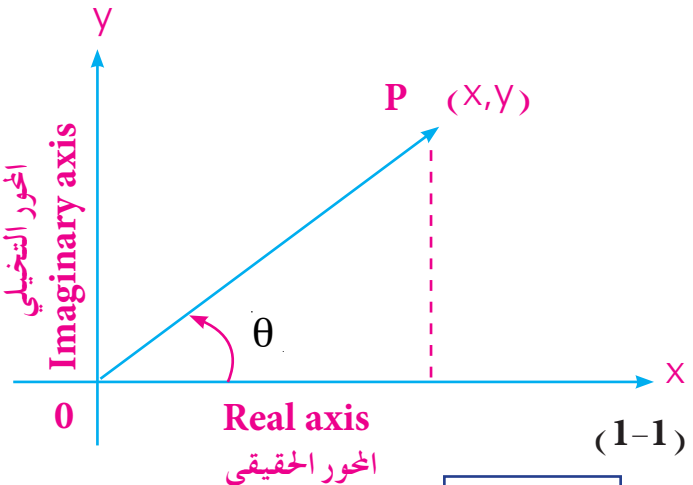
[1-7] التمثيل الهندسي للاعداد المركبة.

Geometric Representation of Complex Numbers.

اذا كان E^2 (او R^2) يمثل المستوي الاقليدي المتعامد المحورين. فانه باقران كل عدد مركب $x+yi$ ($x,y \in R$ حيث) بالنقطة (x,y) في E^2 نحصل على تطبيق تقابل من $\mathbb{C}$ الى R^2 . وفي هذا المستوي سنمثل هندسياً بعض العمليات الجبرية البسيطة في الجمع والطرح في $\mathbb{C}$ والتي تقابل هندسياً العمليات في E^2 (او R^2).

سوف نتناول في هذا البند والبنود اللاحقة تمثيل بعض العمليات على الاعداد المركبة هندسياً والتي سنطلق على الاشكال التي تمثلها اشكال ارجاند نسبة الى العالم (J. R . Argand, 1768 – 1822) وسمي المستوي باسم العالم الالماني الشهير غاوس، بمستوي غاوس (C.F. Gauss 1777–1855) أو بشكل مبسط المستوي المركب (Complex Plane)

اذ يسمى المحور السيني (x–axis) بالمحور الحقيقي حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب اما المحور الصادي (y – axis) فيطلق عليه اسم المحور التخيلي والذي يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب. وبالتالي فان العدد المركب $x + yi$ يُمثل هندسياً بالنقطة (x,y) لاحظ الشكل (1–1)



الشكل (1–1)

لو كان $z_1 = x_1 + y_1\,i$, $z_2 = x_2 + y_2\,i$

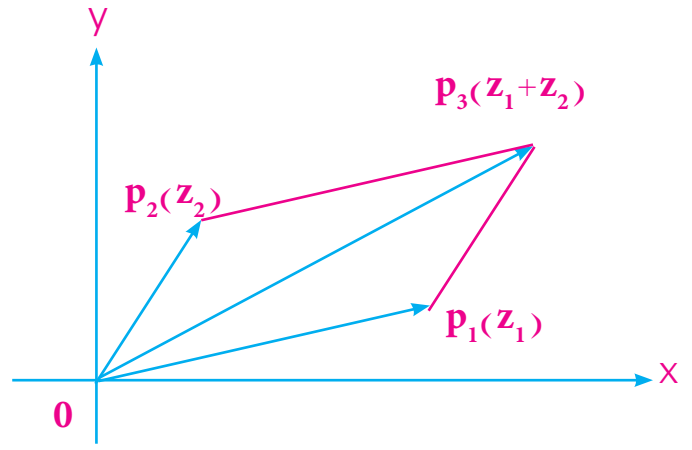
عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ فان :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة $p_3(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات.

كما في الشكل (1–2) :



الشكل (1–2)

اي ان $\overrightarrow{0p_1} + \overrightarrow{0p_2} = \overrightarrow{0p_3}$

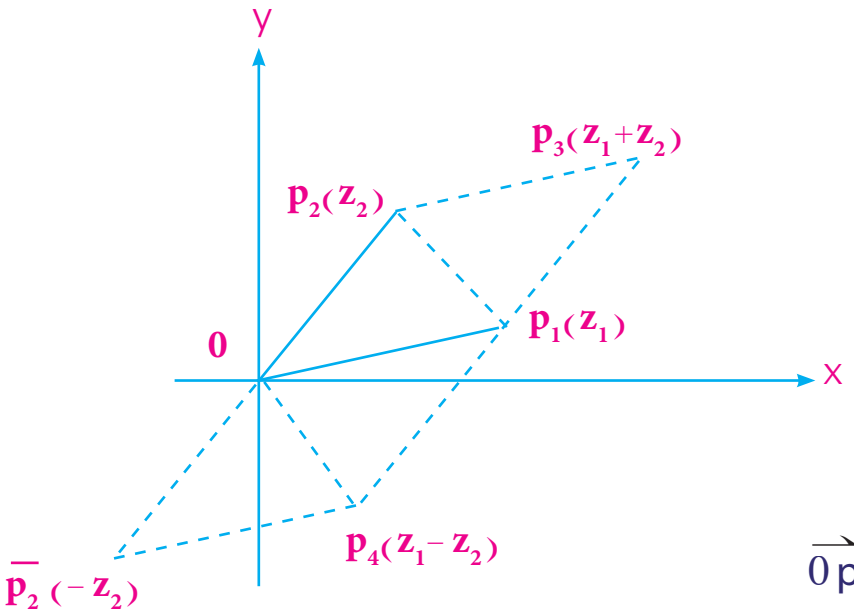
تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ان العدد المركب $x + yi$ يمكن تمثيله بالمتجه $\overrightarrow{0p}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين.

اذا اعتبرنا $\overline{p}_2$ يمثل العدد المركب z_2 – فإن $\overline{p}_2$ هي ناتجة من دوران $\overrightarrow{0p}_2$ حول 0 نصف دورة ، وعليه فإن :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

والذي يقترن بالنقطة p_4 حيث $0p_1\,p_4\,\overline{p}_2$ يشابه متوازي الاضلاع $0p_1\,p_3\,p_2$ كما في الشكل (3–1).



الشكل (3–1)

أي أن $\overrightarrow{0p_4} = \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{0p_1} - \overrightarrow{0p_2}$

ملاحظة

(1) ليكن k عدد حقيقي لا يساوي الصفر . z عدد مركب فان النقطة التي تمثل kz يمكن الحصول عليها بواسطة الانسحاب (الازاحة) الذي مركزه 0 ومسافته الثابت k.

(2) لكل عدد مركب z فان النقطة iz يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 22 –

مثّل العمليات الاتية هندسياً في شكل ارجاند :

a) $(3+4i)+(5+2i)$ b) $(6-2i)-(2-5i)$

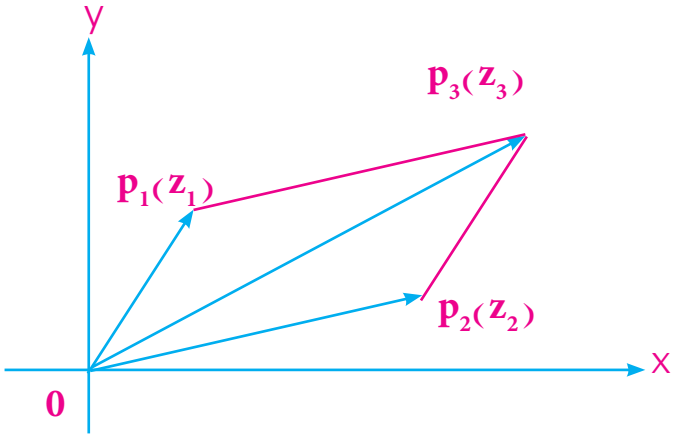
الحل :

a) $(3+4i)+(5+2i)=8+6i$

$z_1 = 3+4i \Rightarrow p_1(z_1) = p_1(3,4)$

$z_2 = 5+2i \Rightarrow p_2(z_2) = p_2(5,2)$

$z_1+z_2=z_3 = 8+6i \Rightarrow p_3(z_3) = p_3(8,6)$



الشكل (1–4)

لاحظ : $\overrightarrow{0p_1}+\overrightarrow{0p_2}=\overrightarrow{0p_3}$

وهو مشابه الى جمع المتجهات.

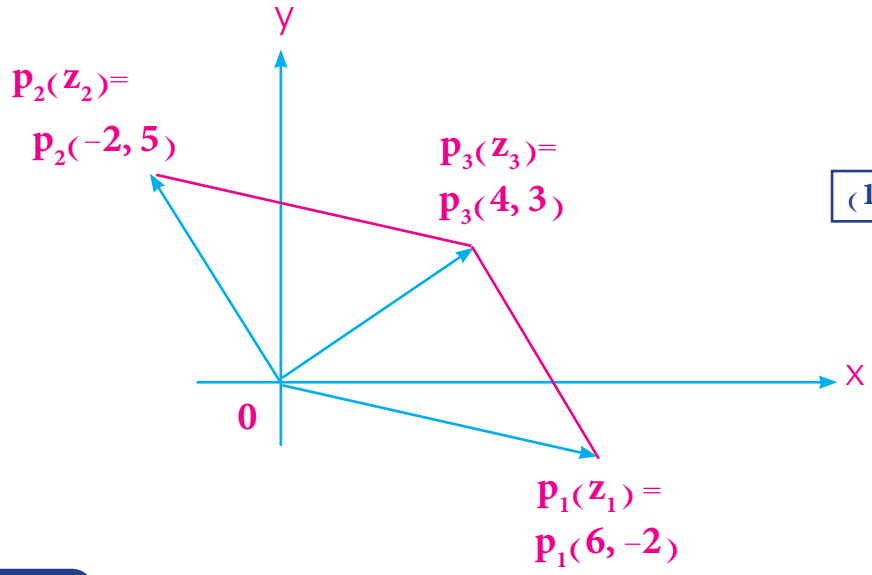
ويكـــــون $0p_1p_3p_2$ متوازي اضلاع قطره هو $\overrightarrow{op_3}$

b) $(6-2i)-(2-5i)=(6-2i)+(-2+5i)=4+3i$

$z_1 = 6-2i \Rightarrow p_1(z_1) = p_1(6,-2)$

$z_2 = -2+5i \Rightarrow p_2(z_2) = p_2(-2,5)$

$z_3 = 4+3i \Rightarrow p_3(z_3) = p_3(4,3)$



الشكل (1–5)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (4-1)

1. اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند.

$z_1 = 2 + 3i\,,\quad z_2 = -1 + 3i\,,\quad z_3 = 1 - i\,,\quad z_4 = i$

2. اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الاتية ثم مثّل الاعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند.

$z_1 = 5 + 3i\,,\quad z_2 = -3 + 2i\,,\quad z_3 = 1 - i\,,\quad z_4 = -2i$

3. اذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$z\,,\ \bar{z}\,,\ -z$

4. اذا كان $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$-3z_2\,,\quad 2z_1\,,\quad z_1 - z_2\,,\quad z_1 + z_2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[1-8] الصورة القطبية (Polar) للعدد المركب.

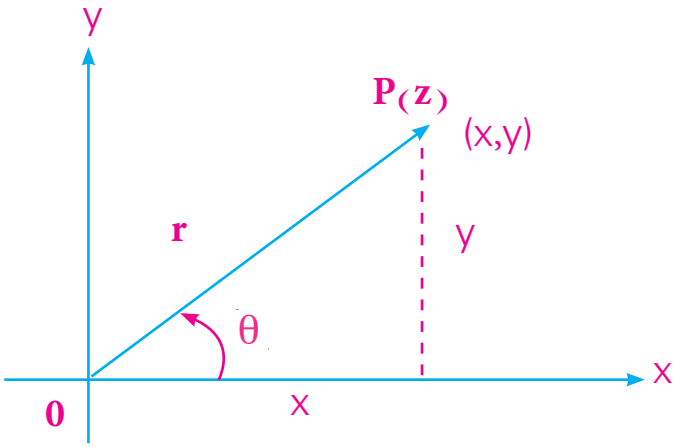
في البنود السابقة درسنا العدد المركب بصيغته الجبرية $z=x+yi$ والديكارتية $z=(x,y)$ وفي هذا البند سندرس صيغة اخرى للعدد المركب تدعى بالصيغة القطبية . وتحويل احدهما الى الاخرى .

فلو كان لدينا العدد المركب $z=x+yi$ ومثّلناه بالنقطة $p(x,y)$ كما في الشكل (1-6) فان :

(r,θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة p حيث 0 يمثل القطب و $\overrightarrow{ox}$ يمثل الضلع الابتدائي، وهذا يعني أن :

$r=\|\overrightarrow{op}\|$ وان $\theta=m\measuredangle xop$

ويكون قياس θ من $\overrightarrow{ox}$ الى $\overrightarrow{op}$ بأتجاه عكس عقارب الساعة اذا كان القياس موجباً، ومع اتجاه عقارب الساعة اذا كان القياس سالباً وعليه فأن :



الشكل (1-6)

$$R(z)=x=r\cos\theta \quad ....(1)$$

$$I(z)=y=r\sin\theta \quad ....(2)$$

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي للعدد المركب z بينما $I(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد المركب z

r يسمى مقياس العدد المركب z (Modulus of Complex Number)

وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ "mod z" او مقياس z ويرمز له $\|z\|$ حيث $r=\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}$

ومن العلاقتين (1) و (2) نحصل على :

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|z\|}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\|z\|}$$

اما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب (Argument of Complex Number)

واختصاراً تكتب بالشكل $\theta=\arg(z)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ملاحظة

يمكن ان تاخذ θ عدداً غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الاخرى لعدد صحيح من الدورات.

فاذا كانت θ سعة عدد مركب فان كلاً من الاعداد : $\theta + 2n\pi$ حيث **n** عدد صحيح يكون ايضاً سعة لنفس العدد المركب.

اما اذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الاساسية لسعة العدد المركب (**principle Value**).

مثال- 23- اذا كان $z = 1 - \sqrt{3}\, i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج ان θ في الربع الرابع

$$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

مثال- 24- اذا كان $z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

نستنتج ان θ في الربع الثالث

$$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ملاحظة

1) ان سعة العدد المركب $z=0$ غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له اتجاه.

2) ممكن الافادة من المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد المركب $z=x+yi$ بصورة اخرى تسمى الصورة القطبية (Polar) وكما يأتي :

$$\because x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

$$\therefore \ z = r\cos\theta + \mathbf{i}\, r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

$$z = \|z\|(\cos(\arg z) + \mathbf{i}\sin(\arg z))$$

او

حيث $r = \mathbf{mod}\, z = \|z\|$ ، $\theta = \mathbf{arg}(z)$ هي سعة العدد المركب z

مثال- 25-

عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصورة القطبية :

a) $-2+2\mathbf{i}$ b) $2\sqrt{3}-2\mathbf{i}$

الحل :

a) $z = -2+2\,\mathbf{i}$

$$\mathbf{mod}\ z = \|z\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \because$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \ \mathbf{arg}(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$\therefore$ الصورة القطبية للعدد المركب z هي :

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

b) $z = 2\sqrt{3} - 2\,\mathbf{i}$

$$\text{mod } z = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$\therefore$ الصورة القطبية للعدد المركب z هي : $z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

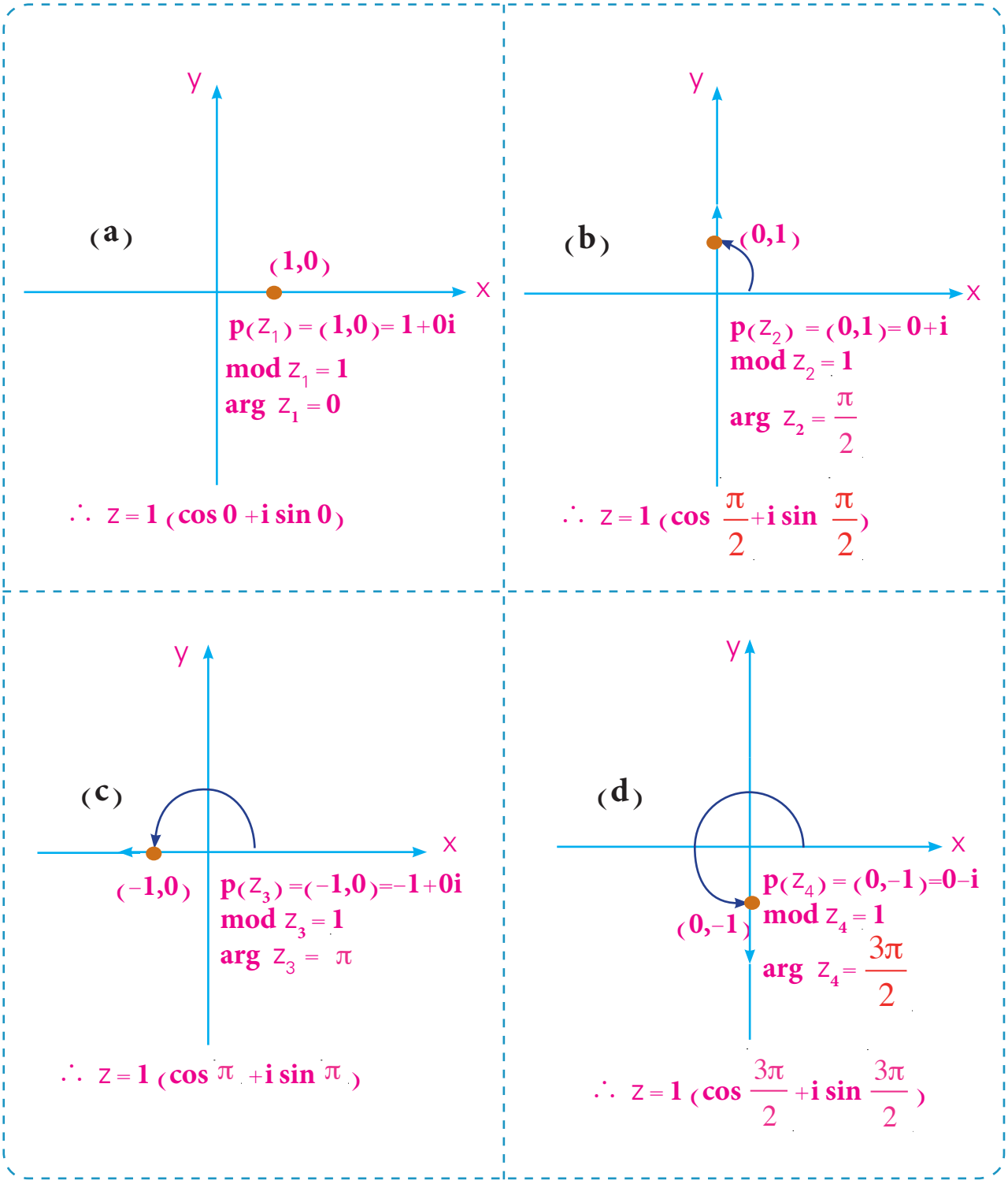
مثال – 26 –

عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصورة القطبية :

a) 1 b) i c) –1 d) –i

الحل :

لاحظ الاشكال الآتية :



الشكل (1-7)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

من المثال السابق نستنتج الاتي :

$$1=(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-1=(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$\mathbf{i}=(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-\mathbf{i}=(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

وبتطبيق الاستنتاج السابق يمكن أن نضع :

$$3=3\times 1=3(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-2=2\times(-1)=2(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$5\,\mathbf{i}=5\times\mathbf{i}=5(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-7\mathbf{i}=7\times(-\mathbf{i})=7(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

[1-9] مبرهنة ديمواڤر.

De Moivre's Theorem

z_1 , z_2 يمكن ان تكتب بصورة : $z_1=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$, $z_2=\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi$

والان سنجد $z_1\cdot z_2$ بالصيغة القطبية

$$z_1\times z_2=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi)$$
$$=\cos\theta\cos\phi+\mathbf{i}\cos\theta\sin\phi+\mathbf{i}\sin\theta\cos\phi+\mathbf{i}^2\sin\theta\sin\phi$$
$$=[\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi]+\mathbf{i}\,[\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\sin\phi]=\cos(\theta+\phi)+\mathbf{i}\sin(\theta+\phi)$$

ولو كان $(\phi=\theta)$ فان العلاقة تصبح $(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta$

ويمكن برهنتها كما يأتي :

$$\text{LHS}=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=(\cos^2\theta+2\mathbf{i}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathbf{i}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta=\text{RHS}$$

وقد توصل العالم ديمواڤر (1664-1754) الى تعميم العلاقة والتي سميت بمبرهنة ديمواڤر.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

De Moivre's Theorem مبرهنة ديموافر

لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فإن

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

البرهان : (للاطلاع فقط)

سنتوصل الى برهان هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي وكما يأتي :

1) لنعتبر $n=1$ فان العلاقة تصبح :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\theta + i\sin 1\theta$ وهي عبارة صحيحة .

2) لنأخذ $k \geq 1$ ونفترض ان العلاقة صحيحة لكل $n = k$.

أي ان $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ صحيحة فرضاً .

3) يجب ان نثبت ان العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^1 (\cos\theta + i\sin\theta)^k$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

$$= \cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

وعليه فاذا كانت العلاقة صحيحة عند n أي $n=k, k \geq 1$ فهي كذلك صحيحة عند $n = k + 1$

وبواسطة الاستقراء الرياضي فان المبرهنة تعتبر صحيحة لجميع قيم n .

مثال- 27- احسب $(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$

الحل :

$$(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) = -i$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال- 28-

بين انه لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فان :

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos\ n\theta - i\sin\ n\theta$$

الحل :

الطرف الايسر

$$LHS = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos\theta + (-i\sin\theta)]^n$$
$$= [(\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n$$
$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$

وبجعل $\phi = -\theta$ تصبح العلاقة

$$= [\cos\phi + i\sin\phi]^n$$
$$= \cos\ n\phi + i\sin n\phi$$
$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos\ n\theta - i\sin\ n\theta$$

الطرف الايمن

$$= RHS$$

(و . هـ . م)

نتيجة لمبرهنة ديموافر :

لكل $n \in Q$, $\theta \in R$ فان

$$z^n = r^n(\cos\ n\theta + i\sin\ n\theta)$$

مثال- 29-

احسب $(1+i)^{11}$

الحل :

$$z = 1 + i$$

$$\because \text{mod}\, z = \sqrt{2},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore \arg z = \frac{\pi}{4}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

$$\therefore z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore (1+i)^{11}=(\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$=2^{5}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$=2^{5}(-1+i)=32(-1+i)$$

ملاحظة

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=(\cos\theta-i\sin\theta)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الاتي :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos\ n\theta-i\sin\ n\theta$$

مثال- 30-

حل المعادلة

$x\in\mathbb{C}$ حيث $x^3+1=0$

الحل :

$$x^3+1=0\Rightarrow$$

$$x^3=-1$$

$$x^3=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$\therefore x=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore x=\cos\frac{\pi+2n\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2n\pi}{3}$$

حيث $n=0,1,2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

بوضع $n=0$ يكون

$$x=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بوضع $n=1$ يكون

$$x=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$=-1+i(0)$$

$$x=-1$$

بوضع $n=2$ يكون

$$x=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اذن مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -1\ ,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

مثال- 31- اوجد الصورة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$

الحل : ليكن $z=\sqrt{3}+i$ نضع z بالصورة القطبية :

$$\|z\|=\sqrt{3+1}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}\qquad \arg(z)=\frac{\pi}{6}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

$$\therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^2$$

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$= \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2n\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2n\pi}{5}\right]$$

حيث $n = 0, 1, 2, 3, 4$

وبوضع $n=0$ يكون

$$z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

وبوضع $n=1$ يكون

$$z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right]$$

وبوضع $n=2$ يكون

$$z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right]$$

وبوضع $n=3$ يكون

$$z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right]$$

وبوضع $n=4$ يكون

$$z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right]$$

$$= \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (1-5)

1. احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos\frac{5}{24}\pi+\mathbf{i}\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

b) $\left[\cos\frac{7}{12}\pi+\mathbf{i}\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

c) $(1-\mathbf{i})^7$

d) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^9$

2. بسط ما يأتي:

a) $\frac{(\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+\mathbf{i}\sin 3\theta)^3}$

b) $(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^8(\cos\theta-\mathbf{i}\sin\theta)^4$

3. بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب. $5-5\mathbf{i}$

4. بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27\mathbf{i}$

5. جد الجذر الرابع للعدد (-16).

6. اوجد قيم $(-64\,\mathbf{i})^{\frac{1}{6}}$.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb