4

الفصل الرابع

Chapter Four

Integration التكامل

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

[4-3] تعريف التكامل.

[4-4] النظرية الاساسية للتكامل – الدالة المقابلة.

[4-5] خواص التكامل المحدد .

[4-6] التكامل غير المحدد .

[4-7] اللوغاريتم الطبيعي.

[4-8] إيجاد مساحة منطقة مستوية.

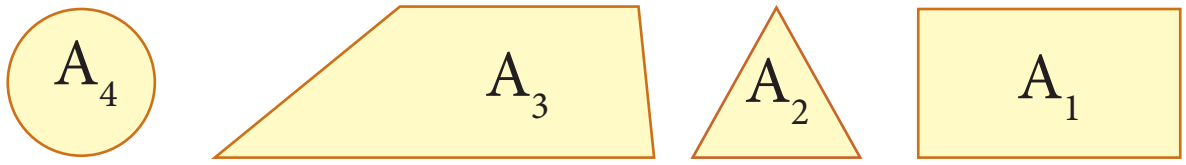
[4-9] إيجاد حجم جسم ناشىء من دوران منطقة مستوية.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات .

Regions Bounded by Curves.

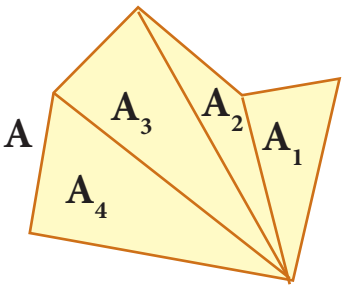
تعرفت من دراستك السابقة على مناطق مستوية مختلفة مثل الذي تراه في الشكل (1 – 4) :



الشكل (4-1)

حيث A_1 منطقة مستطيلة و A_2 منطقة مثلثة و A_3 منطقة شبه منحرف و A_4 منطقة دائرية ولاشك أنك تعرف إيجاد مساحات هذه المناطق .

أما المنطقة A كما في الشكل (2 – 4) والتي تسمى منطقة مضلعة فيمكنك حساب مساحتها بتقسيمها الى مناطق مثلثة .



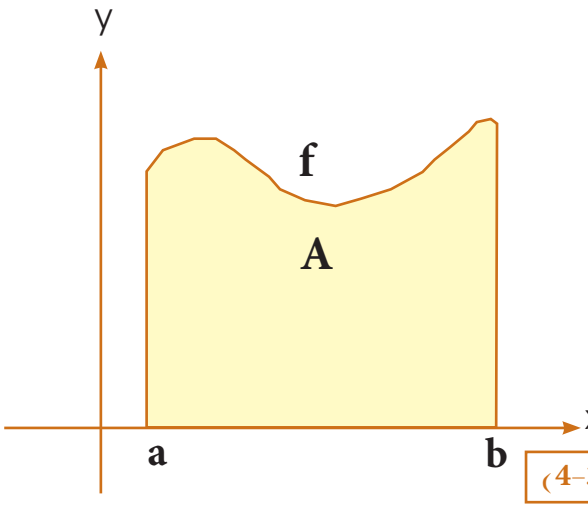
A_1 , A_2 , A_3 , A_4

وتكون مساحتها تساوي مساحة A_1 + مساحة A_2 + مساحة A_3 +مساحة A_4

الشكل (4-2)

وبالطريقة نفسها يمكننا ايجاد مساحة اي منطقة مضلعة بعد أن نقسمها الى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة ، ....

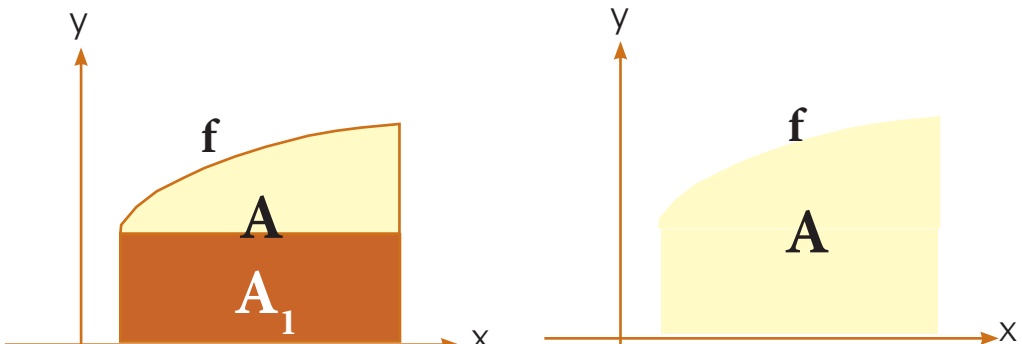
اما المنطقة A في الشكل (3 – 4) والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها الى مناطق معلومة لديك مثل (مثلث ، مربع ، مستطيل ، دائرة ، ...) فكيف يمكنك حساب مساحتها ؟



الشكل (4-3)

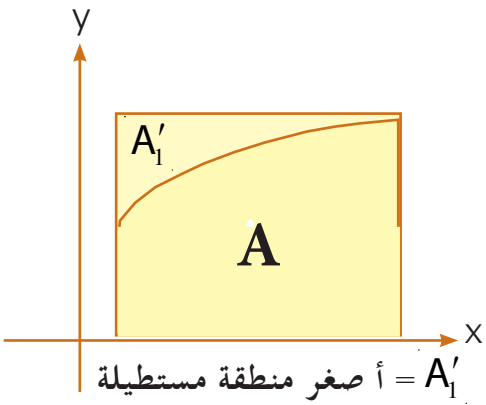
تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تسميات :



A منطقة تحت المنحني

A_1 اكبر منطقة مستطيلة
داخل المنطقة A
(A_1 محتواة في A)



A'_1 = أ صغر منطقة مستطيلة
خارج المنطقة A

الشكل (4-4)

ملاحظة

1. مساحة أي منطقة مستوية هي عدد حقيقي غير سالب .
2. إذا كانت $A' \subseteq A$ فان مساحة المنطقة A' ≥ مساحة المنطقة A .

لاحظ الشكل (5 - 4)

الشكل (5-4)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية :

مثال – 1– في الشكل (6 – 4) ، A هي المنطقة تحت منحني الدالة المستمرة f , أوجد قيمة تقريبية لمساحة هذه المنطقة حيث :

$$A = \{(x,y) : 2 \le x \le 5 \ , \ 0 \le y \le f(x), y = \sqrt{x-1}\}$$

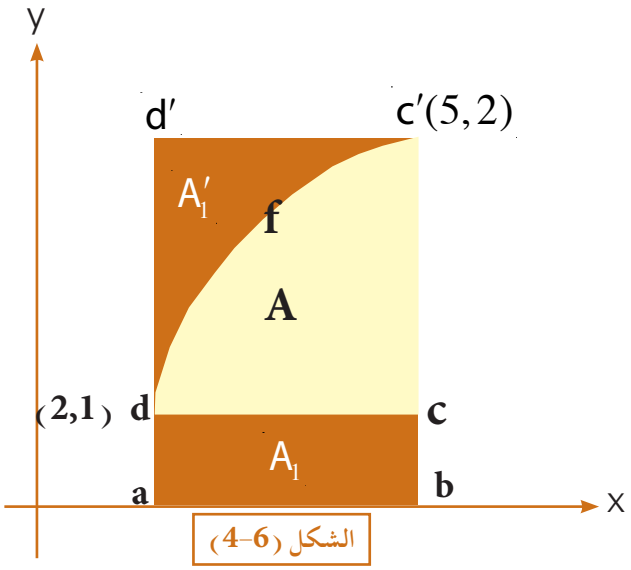
الحل

نحدد داخل المنطقة A اكبر منطقة مستطيلة (a b c d) بحيث تكون قاعدتها من x=2 الى x=5

ولتكن A_1 حيث $A_1 \subseteq A$ وعليه تكون مساحة هذه المنطقة

$A_1 = ab \times ad = (5-2) \times 1 = 3 \ uint^2$

كذلك نحدد خارج المنطقة أصغر منطقة مستطيلة (abc′d′) ولتكن A_1' حيث



الشكل (6–4)

$A \subseteq A_1'$ بحيث تكون قاعدتها من x=2 الى x=5 فتكون مساحة A_1' تساوي :

$$A_1' = ab \times ad' = (5-2) \times 2 = 6 unit^2$$

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A_1'$

∴ مساحة A_1 ≤ مساحة A ≤ مساحة A_1'

3 ≤ مساحة المنطقة A ≤ 6

فتكون القيمة التقريبية الاولى لمساحة المنطقة A تساوي $\frac{3+6}{2} = 4\frac{1}{2} unit^2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ملاحظة

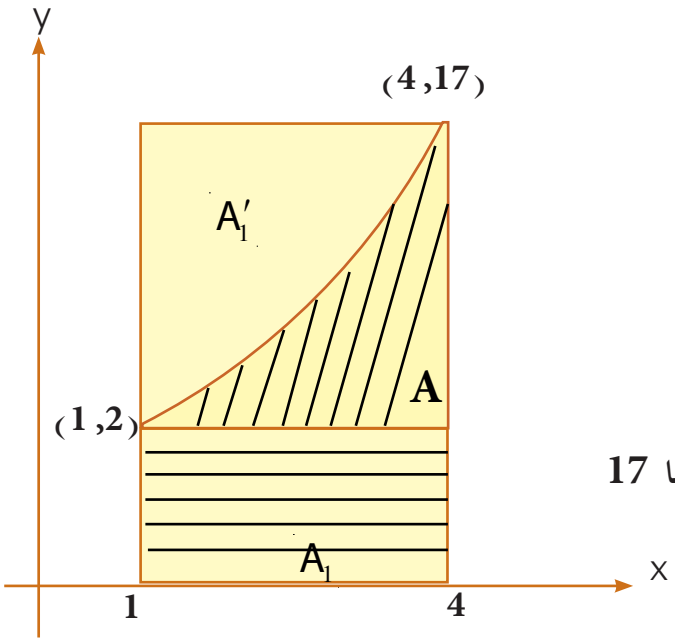
لاحظ في المثال 1 ان A_1 هي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها (ad) يساوي اصغر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها بالرمز (m) اما A_1' فهي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها ad′ يساوي اكبر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها (M) وكما تعرفت في فصل التفاضل فان(m) (اصغر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) وكذلك (M) (اكبر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة [a,b] أو عند النقطة الحرجة ان وجدت .

مثال – 2–

$A = \{(x, y) : 1 \le x \le 4 \ , \ 0 \le y \le x^2 + 1\}$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A .

الحل



الشكل (7–4)

A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل A (محتواة في A)

قاعدتها من x=1 الى x=4 وارتفاعها 2

$m = A_1 = 2(4-1) = 6 \ unit^2$ هي

A_1' اصغر منطقة مستطيلة خارج A (تحتوي A)

قاعدتها ايضاً من x=1 الى x=4 وارتفاعها 17

$m = A_1' = 17(4-1) = 51 \ unit^2$

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A_1'$

∴ مساحة المنطقة A_1 ≤ مساحة منطقة A ≤ مساحة منطقة A_1'

∴ 6 ≤ مساحة A ≤ 51

فتكون القيمة التقريبية لمساحة A تساوي $unit^2$ $\frac{6+51}{2} = 28\frac{1}{2}$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مساحة منطقة مستوية بدقة اكبر:

تمهيد : لنفرض ان مع مهند **19000** ديناراً وأراد حسام ان يعرف هذا المبلغ فكان الحوار الاتي بينهما :

حسام : كم معك من الدنانير ؟

مهند : قدّر المبلغ بنفسك علماً بأنه بين عشرة آلاف وعشرين الفاً .

حسام : أتوقع ان يكون معك **15000** ديناراً أي $\frac{20000+10000}{2}=15000$.

مهند : اقتربت قليلاً ولكن ألمحّ لك اكثر فالمبلغ الذي معي بين **15000** ، **20000** دينار.

حسام : اذن في حدود **17500** دينار اي $\frac{20000+15000}{2}=17500$.

مهند : هذه القيمة اكثر دقة من القيمة الاولى لان القيمة الصحيحة **19000** دينار .

من هذا المثال نستنتج الأتي :

في المحاولة الاولى : **10000** < المبلغ < **20000** وكان الخطأ في القيمة التقريبية الاولى :

$$19000 - 15000 = 4000$$

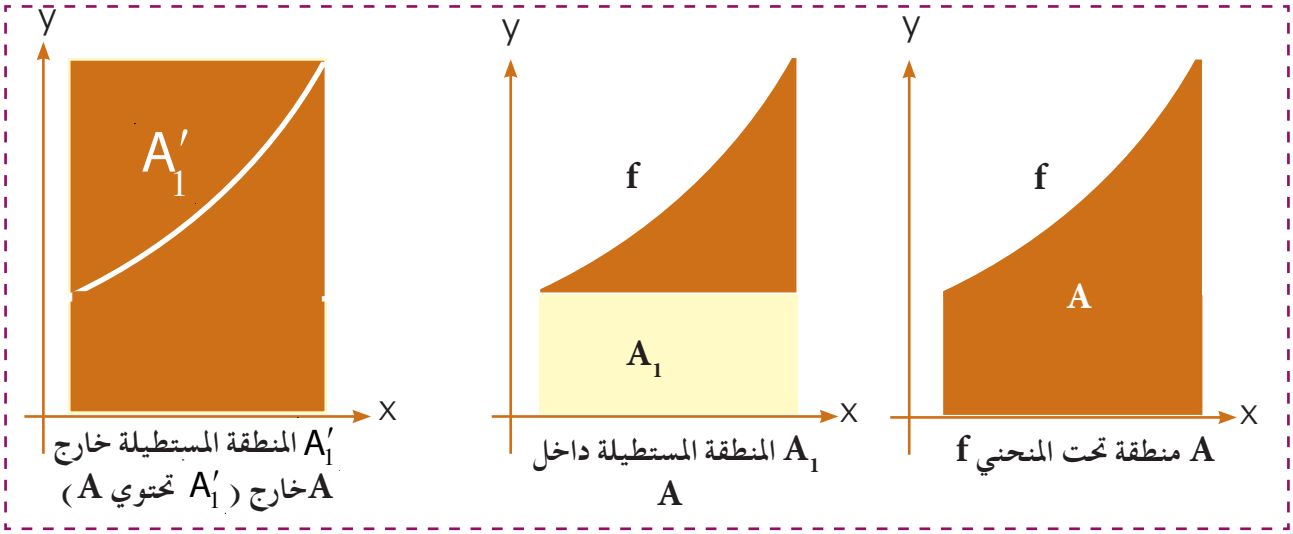
في المحاولة الثانية : **15000** < المبلغ < **20000** كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ومقدار الخطأ :

$$19000 - 17500 = 1500$$

اذن كلما استطعنا ان نجعل الفرق بين الحدين الاعلى والادنى اقل كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ، وهكذا لحساب مساحة منطقة **A** بدقة اكبر نحاول ان نجعل مقدار هذه المساحة بين حدين بحيث يكون الفرق بينهما اقل ما يمكن .

والحدين الاعلى والادنى هما مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية (المحتواة في **A**)، ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج **A** والاشكال (**8 – 4**) ، (**9 – 4**) ، (**10 – 4**) توضح هذه الفكرة.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb



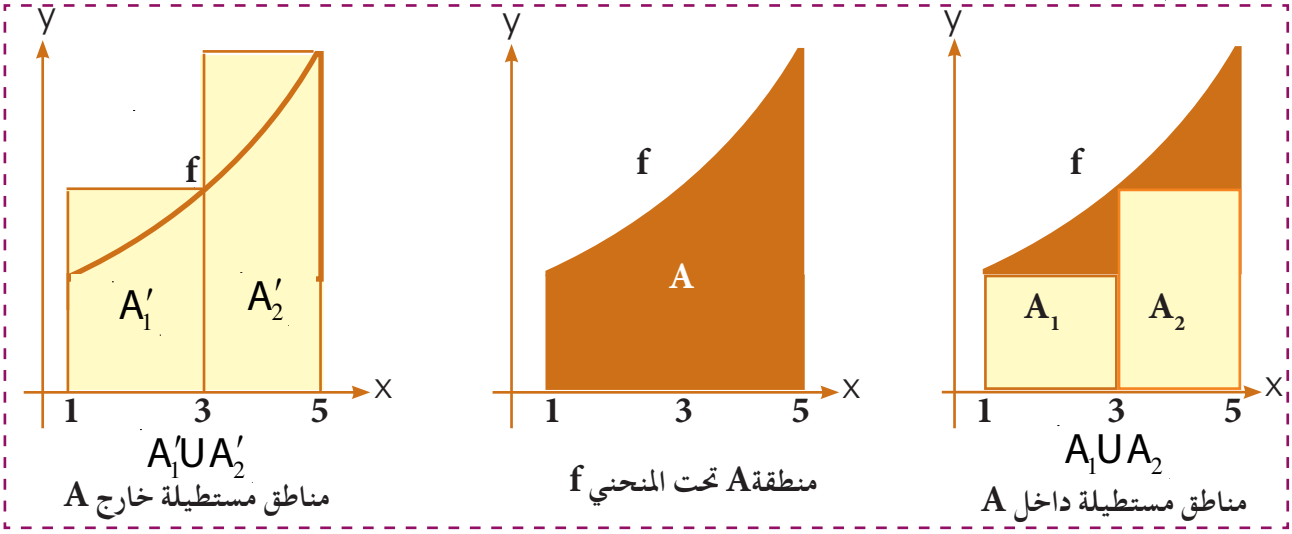
A منطقة تحت المنحني f

A_1 المنطقة المستطيلة داخل A

A'_1 المنطقة المستطيلة خارج A خارج (A'_1 تحتوي A)

الشكل (4-8)

لاحظ ان هناك فرقاً واضحاً بين مساحة A_1 ومساحة A'_1 حيث مساحة A_1 أصغر بكثير من مساحة A ,
اما مساحة A'_1 فهي اكبر كثيراً من مساحة A .



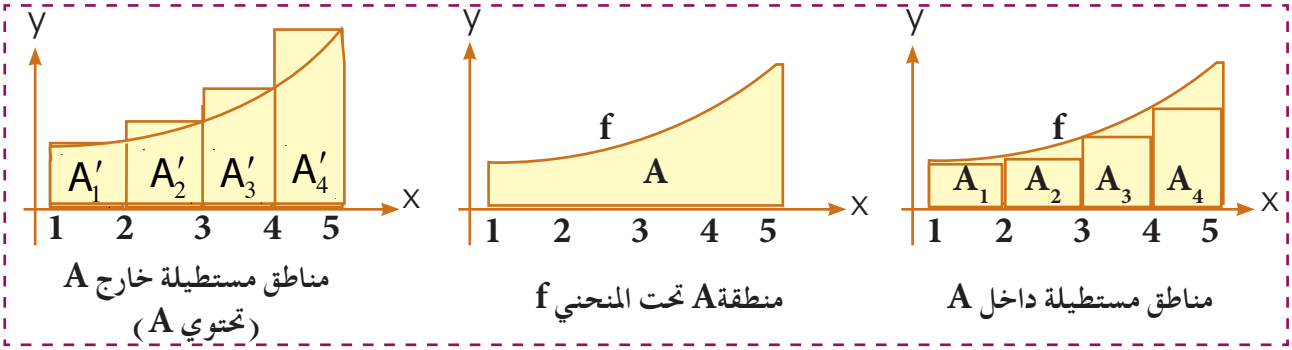
$A_1 \cup A_2$
مناطق مستطيلة داخل A

منطقة A تحت المنحني f

$A'_1 \cup A'_2$
مناطق مستطيلة خارج A

الشكل (4-9)

في الشكل (10 - 4) تجزأت القاعدة [5 , 1] الى أربعة فترات جزئية .



مناطق مستطيلة داخل A

منطقة A تحت المنحني f

مناطق مستطيلة خارج A
(تحتوي A)

الشكل (4-10)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

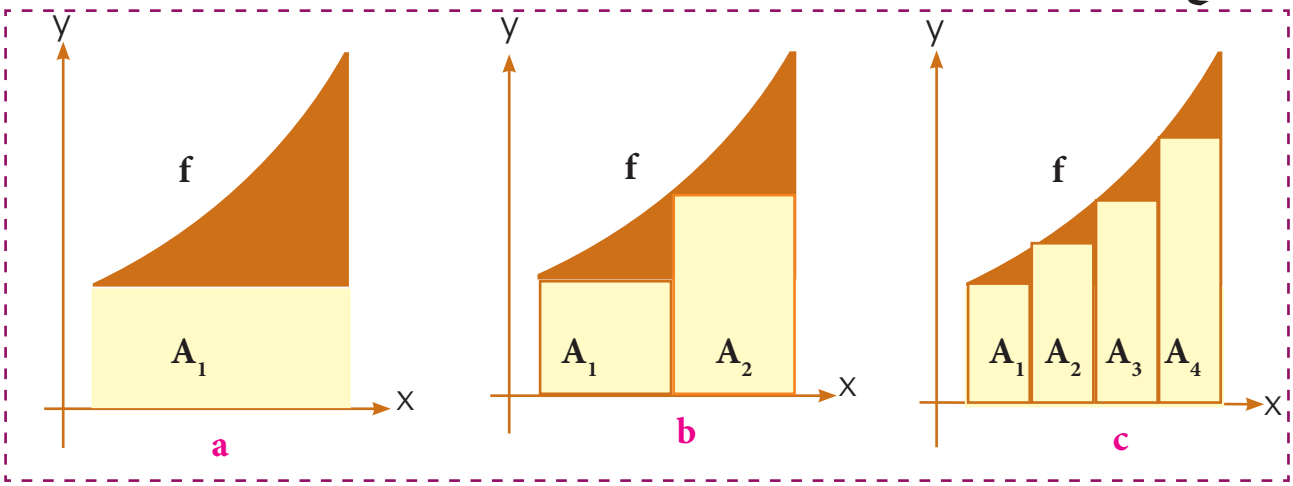
ملاحظة (1)

في الشكل (9 – 4) تجزأت الفترة الى فترتين جزئيتين هما [3, 1], [5, 3] , في مثل هذه الحالة تسمي الثلاثية المرتبة (5, 3, 1) تجزيئاً (partition) للفترة [5, 1] ويرمز لها بالرمز σ اي (5, 3, 1) = σ
وبالمثل في الشكل (10 – 4) تكون (5, 4, 3, 2, 1) = σ تجزيئاً للفترة [5, 1] .
حيث ان [2, 1], [3, 2], [4, 3], [5, 4] هي فترات جزئية من الفترة [5, 1] .

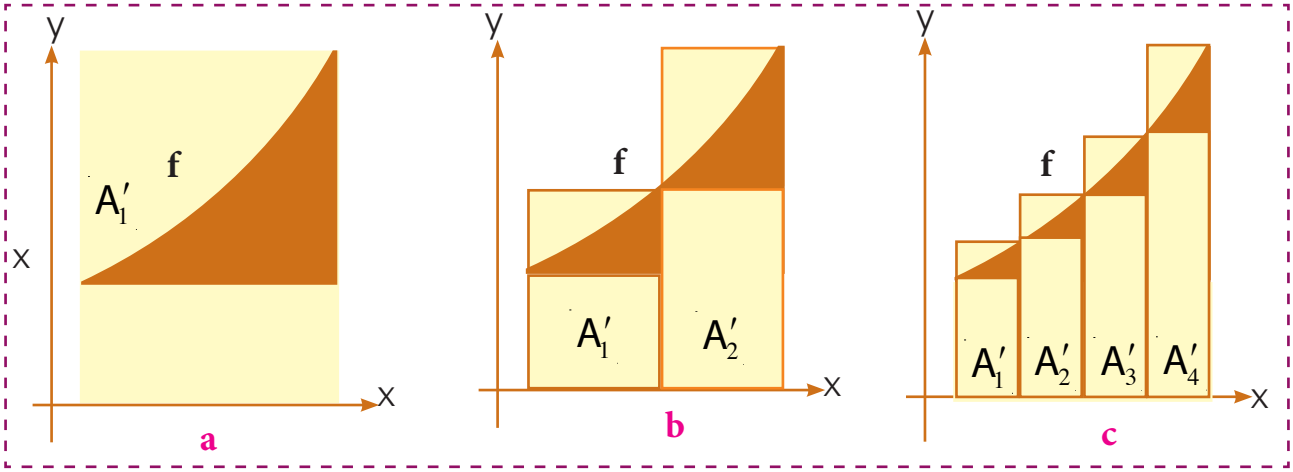
ملاحظة (2)

انظر الى الشكلين (11 – 4) ، (12 – 4) تجد أنه كلما زادت نقاط التجزيء فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً. وبالتالي فان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A تصبح اكثر دقة.

∴ مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ≤ مساحة A ≤ مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A .



الشكل (11–4)



الشكل (12–4)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 3–

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الاتية :

$$A = \{(x,y) : 2 \le x \le 5 \ , \ y = x^2 + 1\}$$

وذلك باستخدام التجزئة

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

b) $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

الحل

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

ان تجزئة $\sigma_1 = (2,3,5)$ يعني ان الفترة $[2,5]$ تجزأت الى الفترات الجزئية $[2,3]$, $[3,5]$.

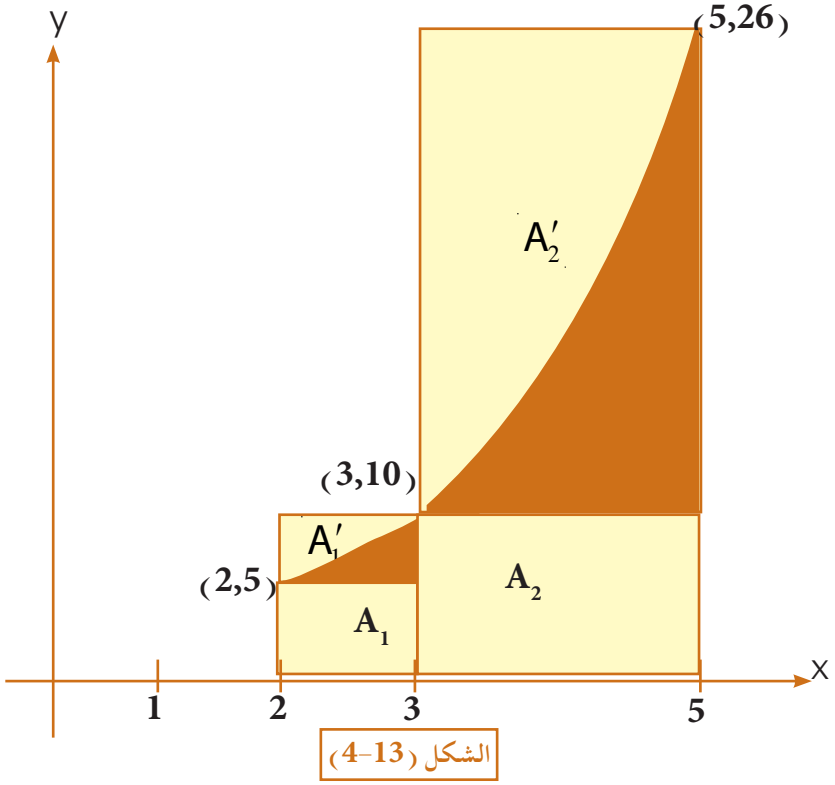
$$m = A_1 + A_2 = 1\times 5 + 2\times 10 = 25 \text{unit}^2$$

كذلك

$$M = A_1' + A_2' = 1\times 10 + 2\times 26 = 62 \text{unit}^2$$

بما ان مجموع مساحات المنطقة المستطيلة داخل A < مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A

القيمة التقريبية لمساحة A $\therefore 25 \le A \le 62 \Rightarrow A = \dfrac{25+62}{2} = 43\dfrac{1}{2} \text{unit}^2$



الشكل (13–4)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

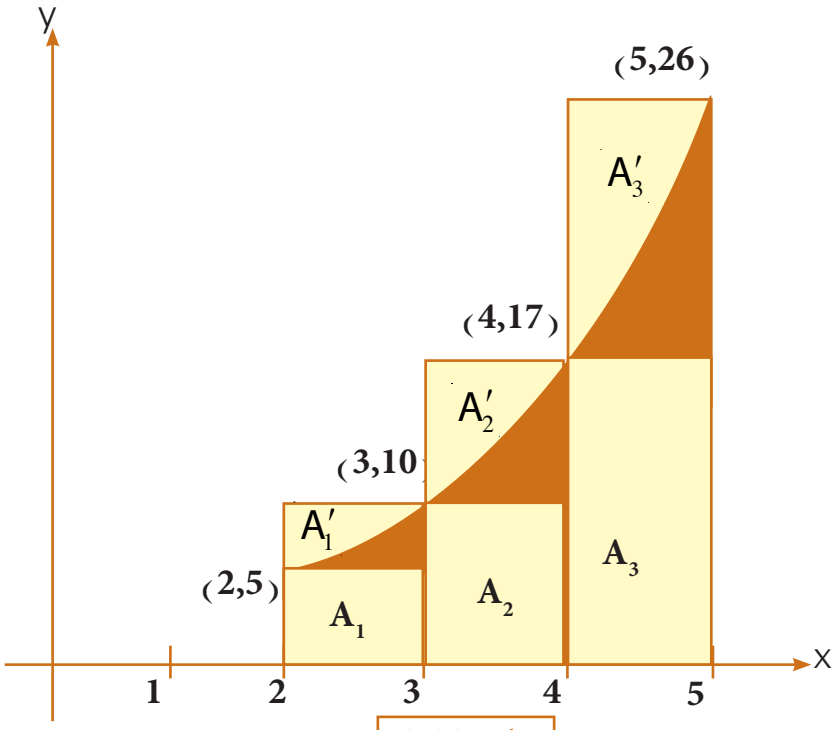
b) $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

ان تجزئة (2,3,4,5) = σ_2 يعني ان الفترة [2 , 5] تجزأت الى الفترات الجزئية [2,3]،[3 ,4]،[4 ,5]

$$\therefore m = A_1 + A_2 + A_3 = 1\times 5 + 1\times 10 + 1\times 17 = 32 unit^2$$

$$\therefore M = A'_1 + A'_2 + A'_3 = 1\times 10 + 1\times 17 + 1\times 26 = 53 unit^2$$

$$\therefore A = \frac{m+M}{2} = \frac{32+53}{2} = 42\frac{1}{2} unit^2$$



الشكل (4-14)

ملاحظة

كما اوضحنا أنه كلما زادت عدد النقاط التجزيئية فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً.

ففي المثال السابق عندما كانت التجزئة (5, 3, 2) كان الفرق : $62 - 25 = 37$.

وعندما كان تجزئة (5, 4, 3, 2) كان الفرق : $53 - 32 = 21$.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

تعلمت في البند السابق إيجاد مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية ومجموع مساحات المناطق المستطيلة الخارجية، وفي هذا البند سوف نعتبر الدالة : $f:[a,b]\to R$

مستمرة على $[a,b]$ ونجد مجموع مساحات المستطيلات داخل المنطقة A (Lower Rectangles) ثم مجموع مساحة المستطيلات خارج المنطقة A (Upper Rectangles) (حيث A المنطقة تحت المنحني f).

أولاً : نفرض أن : $f(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in[a,b]$

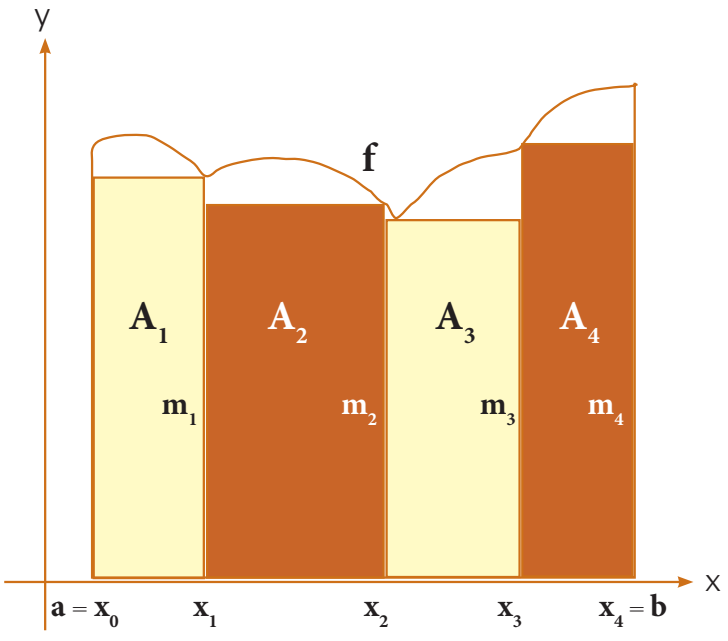
حيث $\sigma=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$

فتكون مساحة المنطقة المستطيلة A_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ وارتفاعها m_1 تساوي $m_1(x_1-x_0)$ حيث m_1 (اصغر قيمة للدالة في هذه الفترة) .

وبالمثل مساحة المنطقة المستطيلة A_2 والتي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ وارتفاعها m_2 تساوي $m_2(x_2-x_1)$ .... وهكذا

وبالتالي يكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A والتي سنرمز لها بالرمز $L(\sigma,f)$ تساوي

$$L(\sigma,f)=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+m_3(x_3-x_2)+m_4(x_4-x_3).$$

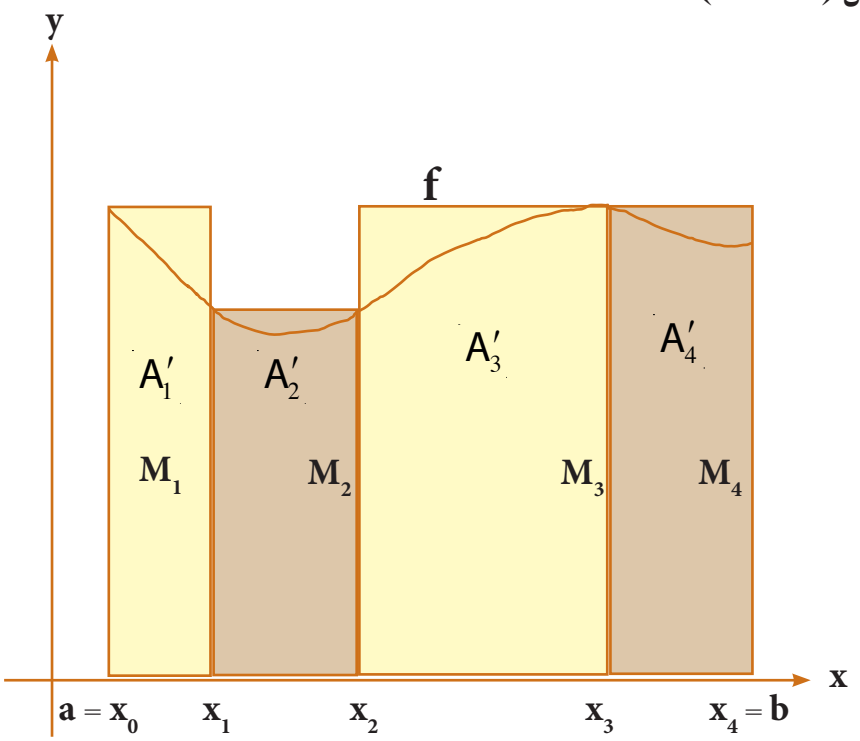


الشكل (4-15)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

لاحظ ان : $L(\sigma, f) \geq$ مساحة A

كذلك في الشكل (16 – 4)



الشكل (16–4)

مساحة المنطقة A'_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ تساوي $M_1(x_1 - x_0)$ حيث M_1 اكبر قيمة للدالة في الفترة $[x_0, x_1]$ ومساحة المنطقة المستطيلة A'_2 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ تساوي $M_2(x_2 - x_1)$ ..... وهكذا

فيكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A تساوي والتي سنرمز لها بالرمز $U(\sigma, f)$ تساوي

$$U(\sigma, f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3).$$

لاحظ أن :

$$U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$$

$$L(\sigma, f) \leq \text{مساحة } A \leq U(\sigma, f)$$

∴ أول قيمة تقريبية لمساحة A وفق التجزئة σ تساوي $\dfrac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$.

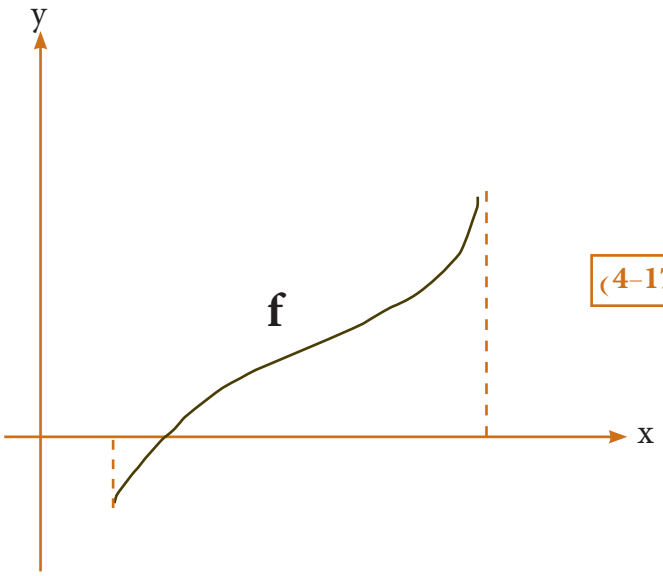
تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ثانياً : عندما لانشترط ان تكون $f(x) \geq 0$ ، $\forall\ x \in [a,b]$ كما في الشكل (17 – 4) فانه من الممكن ان يكون **m** (اصغر قيمة ممكنة للدالة) عدداً سالباً أو موجباً او صفراً وبالتالي فانه من المتوقع أن تكون $L(\sigma, f)$ عدداً سالباً أو موجباً أو صفراً .

وبالمثل $U(\sigma, f)$ عدد موجباً أو سالباً أو صفراً وبما ان العدد السالب لا يقيس مساحة لهذا فاننا نسمي :

$L(\sigma, f)$ المجموع الاسفل

$U(\sigma, f)$ المجموع الاعلى



الشكل (17–4)

مثال – 4–

لتكن $f:[0,5] \to R,\ f(x) = 5 - 2x$ واذا كان $\sigma = (0, 1, 3, 5)$ فاوجد المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$

الحل

$$f(x) = 5 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \neq 0$$

$\therefore$ لاتوجد نقاط حرجة والدالة متناقصة في مجالها لانه $f'(x) \leq 0$ فتكون اكبر قيمة واصغر قيمة عند طرفي كل فترة جزئية من الفترات الآتية : $[0,1]$ ، $[1,3]$ ، $[3,5]$

ولايجاد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ للدالة $f(x) = 5 - 2x$ في الفترة $[0,5]$ إذا كان $\sigma = (0, 1, 3, 5)$ نعمل الجدول الاتي :

الفترة الجزئية $[a, b]$	طول الفترة $h_i = b - a$	$m_i = f(b)$	$m_i = f(a)$	$\sum h_i m_i = L(\sigma, f)$	$\sum h_i M_i = U(\sigma, f)$
$[0, 1]$	$h_1 = 1-0 = 1$	$m_1 = 5-2 = 3$	$M_1 = 5-0 = 5$	$L_1 = (1)(3) = 3$	$U_1 = (1)(5) = 5$
$[1, 3]$	$h_2 = 3-1 = 2$	$m_2 = 5-6 = -1$	$M_2 = 5-2 = 3$	$L_2 = (2)(-1) = -2$	$U_2 = (2)(3) = 6$
$[3, 5]$	$h_3 = 5-3 = 2$	$m_3 = 5-10 = -5$	$M_3 = 5-6 = -1$	$L_3 = (2)(-5) = -10$	$U_3 = (2)(-1) = -2$
				-9	9

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 5–

اذا كانت $f:[0,4]\to R\ ,\ f(x)=3x-x^2$

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ حيث $\sigma=(0,1,3,4)$

الحل

$$f(x)=3x-x^2\Rightarrow f'(x)=3-2x$$

وعندما $f'(x)=0$

$$3-2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\in[1,3]$$

أي ان النقطة الحرجة توجد في الفترة $[1,3]$

الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $h_i=b-a$	$m_i=f(b)$	$M_i=f(a)$	$h_i m_i$ $=L(\sigma,f)$	$h_i M_i$ $=U(\sigma,f)$
$[0,1]$	$h_1=1-0=1$	$m_1=3(1)-1=2$	$M_1=3(0)-0=0$	$L_1=(1)(2)=2$	$U_1=(1)(0)=0$
$[1,3]$	$h_2=3-1=2$	$m_2=3(3)-9=0$	$M_2=3(1)-1=2$	$L_2=(2)(0)=0$	$U_2=(2)(2)=4$
$[3,4]$	$h_3=4-3=1$	$m_3=3(4)-16=-4$	$M_3=3(3)-9=0$	$L_3=(1)(-4)=-4$	$U_3=(1)(0)=0$
				$L(\sigma,f)=-2$	$U(\sigma,f)=4$

لاحظ ان $L(\sigma,f)\ \le\ U(\sigma,f)$.

ولاحظ أيضاً أن $L(\sigma,f)$ لاتمثل مجموعة مساحات المناطق المستطيلة الداخلية لان m_3 سالبة وتساوي (-4) .

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (1-4)

1. $f:[-2,1]\to R\ ,\ f(x)=3-x$

عندما $U(\sigma,f)\ ,\ L(\sigma,f)$ اوجد كل من

a) $\sigma=(-2,0,1)$

b) $\sigma=(-2,-1,0,1)$

2. $f:[1,5]\to R\ ,\ f(x)=4x-x^2$

جد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A تحت المنحني اذا كان $\sigma=(1,2,4,5)$

3. $f:[1,4]\to R\ ,\ f(x)=x^2+1$

جد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A تحت المنحني إذا كان :

a) $\sigma=(1,2,4)$

b) $\sigma=(1,2,3,4)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-3] تعريف التكامل .

لاحظت في البند السابق أنه إذا كانت :

$f:[a,b]\to R$

دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه وفقاً للتجزئة σ يكون $L(\sigma,f)\le U(\sigma,f)$

والآن نسأل السؤال الآتي : هل يوجد عدد k بحيث : $L(\sigma,f)\le k\le U(\sigma,f)$

لأي تجزئة للفترة $[a,b]$ ؟

والجواب : هو ما تنص عليه المبرهنة التالية :

مبرهنة (4-1) :

اذا كانت : $f:[a,b]\to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه يوجد عدد وحيد k بحيث لأي تجزيء σ للفترة $[a,b]$ فان $L(\sigma,f)\le k\le U(\sigma,f)$

نسمي العدد k التكامل المحدد للدالة f على $[a,b]$ ونرمز له $\int_a^b f$ ويقرأ التكامل من a الى b للدالة f ونسمي b,a حدّي التكامل

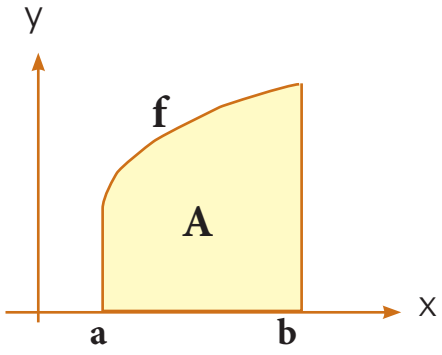
ملاحظات

1. اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فان : $L(\sigma,f)\le\int_a^b f\le U(\sigma,f)$

وتكون القيمة التقريبية للتكامل $\int_a^b f=\dfrac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$

2. اذا كانت : $f(x)\ge 0\ ,\ \forall x\in[a,b]$

فان $\int_a^b f$ يعطي مساحة المنطقة A تحت منحني f وهو عدد غير سالب .



الشكل (4-19)

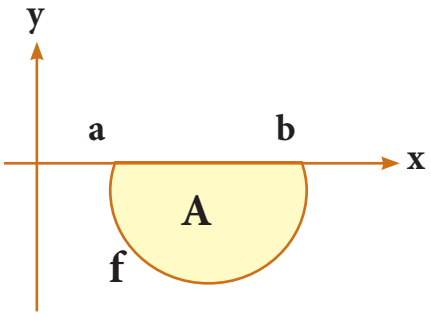
تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

3. اذا كانت $f(x) \le 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فـإن :

$$\int_a^b f \le 0$$

وهذا لا يـدل على المساحـــــة ، أمـا مساحـــــة المنطقة A الموضحة في الشكـل (20 – 4) فهي تساوي

$$-\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right|$$



الشكل (20–4)

4. إن قيمة $\int_a^b f$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى الدالة f ، واذا كان x رمز المتغير في قاعدة الدالة فإنه يمكن كتابة التكامل المحدد بالشكل التالي : $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث تشير dx الى أن حدّي التكامل b,a هما قيمتان للمتغير x .

مثال – 1– لتكن $f:[1,3] \to R$ حيث $f(x) = x^2$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$.

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

الحل

$$f(x) = x^2$$

f دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$

$$\therefore f'(x) = 2x \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

أي أن النقطة الحرجة عند $x = 0$ وبما أن $0 \notin [1,3]$

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b - a$	$m = f(a)$	$M = f(b)$
$[1,2]$	1	1	4
$[2,3]$	1	4	9

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

∴ أعظم قيمة وأصغر قيمة للدالة تكون عند طرفي كل فترة جزئية اي عند طرفي كل من [1,2] ، [2,3]

$$L(\sigma, f) = (1\times 1)+(1\times 4) \quad = 1+4 = 5$$

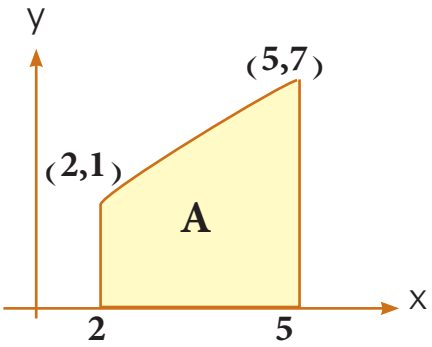
$$U(\sigma, f) = (1\times 4)+(1\times 9) \quad = 4+9 = 13$$

$$\therefore \int_1^3 x^2\, dx = \frac{5+13}{2} = 9 \qquad \text{تقريبا}$$

مثال – 2 –

لتكن $f:[2,5]\to R$ حيث $f(x) = 2x-3$

أوجد $\int_2^5 f$



الشكل (21–4)

الحل

لاحظ ان $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[2,5]$

∴ يمكن ايجاد $\int_2^5 f$ من مساحة A وهي منطقة شبه منحرف

∴ مساحة المنطقة $A = \frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيين × طول الارتفاع.

$$\therefore A = \frac{1}{2}[1+7](3) = \frac{1}{2}(8)(3) = 12\ Unit^2$$

$$\therefore \int_2^5 f = 12$$

أو يمكن إيجاد $\int_2^5 f$ بالطريقة السابقة وكما يأتي :

فترة التجزئة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	$M_i=f(b)$	$m_i=f(a)$	$U(\sigma, f)$	$L(\sigma, f)$
[2,3]	1	3	1	3	1
[3,5]	2	7	3	14	6
				17	7

$$\int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12\ Unit^2$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 3–

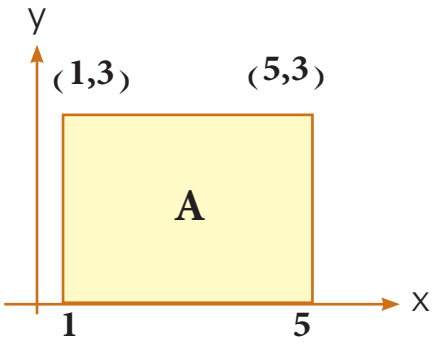
لتكن $f(x)=3$, $f:[1,5]\to R$ أوجد $\int_1^5 f$

الحل

من الشكل (22 – 4) نلاحظ ان المنطقة A هي

منطقة مستطيلة طول قاعدتها = (5 – 1) = 4

وعرضها = 3



الشكل (22–4)

$\therefore A=(4)(3)=12\ \text{Unit}^2$

$\therefore \int_1^5 f = 12$

طريقة ثانية :

فترة التجزئة $[a,b]$	طول الفترة $h_i=b-a$	$M_i=f(b)$	$m_i=f(a)$	$L(\sigma,f)$	$U(\sigma,f)$
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				12	12

$$\int_1^{15} 3dx = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12\ \text{Unit}^2$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (2-4)

1. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$.

2. لتكن $f(x) = 3x - 3$, $f:[1,5] \to R$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,5)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f.

3. أوجد قيمة التكامل $\int_2^4 \left(3x^2 - 3\right) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4)$.

4. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-3}^2 f$ حيث $f(x) = -4$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-4] النظرية الاساسية للتكامل – الدالة المقابلة:

لقد تعلمنا فيما سبق طريقة إيجاد قيمة للتكامل المحدد $\int_a^b f$ حيث **f** دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ كما أوجدنا في بعض الحالات الخاصة قيمة دقيقة لهذا التكامل المحدد (باستخدام المساحة) .

والمبرهنة الآتية تساعدنا في إيجاد قيمة التكامل المحدد .

مبرهنة :(4-2)

اذا كانت **f** دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث :

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

ويكون : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة **f** (Antiderivative of The Function) على الفترة $[a,b]$

فمثلاً : اذا كانت $f:[1,2] \to R \quad , \quad f(x) = 2x$

فان $F:[1,2] \to R \quad , \quad F(x) = x^2$

$$F'(x) = 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in [1,2]$$

وعليه فان :

$$\int_1^2 f = F(2) - F(1)$$
$$= 4 - 1 = 3$$

ملاحظة

نشير الى أن $F(2) - F(1)$ تكتب بالصورة $[F(x)]_1^2$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 1–

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\left(\int_1^5 f\right)$.

الحل

$$\int_1^5 f(x) = F(5) - F(1) = 3(25) - 3(1) = 75 - 3 = 72$$

ويمكن ان نكتب ذلك بالصورة الآتية :

$$\int_1^5 f(x) = \left[F(x)\right]_1^5 = \left[3x^2\right]_1^5 = 75 - 3 = 72$$

مثال – 2–

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$$F(x) = \sin x \quad , \quad F : [0,\frac{\pi}{2}] \to R$$

فأوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = \left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال – 3–

أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$, $F : [1,3] \to R$

هي دالة مقابلة للدالة : $f(x) = 3x^2$

الحل

∵ $F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R (لانها دالة كثيرة الحدود)

∴ F مستمرة على $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$.

∵ $F'(x) = 3x^2 = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,3)$

∴ F هي دالة مقابلة للدالة f على $[1,3]$.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 4– أثبت أن الدالة : $F : R \to R \ , \ F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة :

$$f : R \to R \ , \ f(x) = \cos 2x$$

ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \ dx$

الحل

$f(x) = \cos 2x \ , \ f : R \to R$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R** كما تعلمنا في الصف الخامس العلمي كذلك فان :

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R**

$$\because F'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)(2) = \cos 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in R$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة **f**

$$\because \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حسب المبرهنة (**2–4**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}\times 1 - 0 = \frac{1}{2}.$$

وفي ما يلي جدول مساعد يبين الدالة **f** والدالة المقابلة لها F في حالات خاصة . وبإمكانك عزيزي الطالب أن تتحقق من صحة ذلك بإثبات أن :

$$F'(x) = f(x)$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وفيما يلي جدول مساعد يبيّن الدالة f والدالة المقابلة لها F

الدالة المقابلة لها $F(x)$	الدالة $f(x)$
ax	a
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n \quad , \quad n \neq -1$
$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$	$ax^n \quad , \quad n \neq -1$
$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$	$[f(x)]^n . f'(x) \quad , \quad n \neq -1$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$\sec^2(ax+b)$
$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$\csc^2(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sec ax$	$\sec ax \tan ax$
$-\frac{1}{a}\csc ax$	$\csc ax \cot ax$

مجموعة الدوال المقابلة لاية دالة f كما في الجدول هي $F + C$ حيث C عدد ثابت حقيقي

.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 5 أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال – 6 أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4} = 0 + 1 = 1$$

مثال – 7 أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

مثال – 8 جد $\int_1^3 x^3 dx$

الحل

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-5] خواص التكامل المحدد :

اولاً :

1. **f** دالة مستمرة على $[a,b]$ فاذا كانت :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \text{ فان } f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$$

فمثلاً :

a) $f(x) = x^2 \geq 0 \ , \ \forall x \in [-1,2]$ لأن : $\int_{-1}^{2} x^2 dx \geq 0$

b) $f(x) = 3 > 0 \ , \ \forall x \in [-2,3]$ لأن : $\int_{-2}^{3} 3dx \geq 0$

c) $f(x) = (x+1) > 0 \ , \ \forall x \in [2,3]$ لأن : $\int_{2}^{3} (x+1)dx > 0$

2. **f** دالة مستمرة على $[a,b]$ فاذا كانت : $\int_a^b f(x) < 0$ فان $f(x) \leq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$

فمثلاً :

a) $f(x) < 0, \forall X \in [1,2]$ لان : $\int_{1}^{2} (-2)dx \leq 0$

b) $f(x) \leq 0, \forall X \in [-2,-1]$ لان : $\int_{-2}^{-1} x \ dx \leq 0$

ثانياً :

f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، **c** عدداً حقيقياً ثابتاً فان : $\int_a^b c.f = c\int_a^b f$

مثال -9- اذا كان $\int_2^5 f = 8$ فأوجد $\int_2^5 5f$.

الحل

$$\int_2^5 5f = 5\int_2^5 f = 5 \times 8 = 40$$

ثالثاً :

إذا كانت الدالتان f_1 , f_2 مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان : $\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على $[a,b]$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 10– اذا كانت $\int_1^3 f_2 = 17$, $\int_1^3 f_1 = 15$ فأوجد كلاً من :

$$\int_1^3 (f_1 + f_2) \quad , \quad \int_1^3 (f_1 - f_2)$$

الحل

$$\int_1^3 (f_1 + f_2) = \int_1^3 f_1 + \int_1^3 f_2 = 15 + 17 = 32$$
$$\int_1^3 (f_1 - f_2) = \int_1^3 f_1 - \int_1^3 f_2 = 15 - 17 = -2$$

مثال – 11– اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(X)dx$:

الحل

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = \int_1^2 3x^2 dx + \int_1^2 2x \ dx$$
$$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8-1) + (4-1) = 7 + 3 = 10$$

رابعاً :

اذا كانت **f** دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

مثال – 12– اذا كانت $\int_3^7 f = 8$, $\int_1^3 f = 5$ فأوجد $\int_1^7 f$:

الحل

$$\int_1^7 f = \int_1^3 f + \int_3^7 f = 5 + 8 = 13$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 13 –

لتكن $f(x)=|x|$ اوجد $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

الحل

f دالة مستمرة على $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x)=\begin{cases} x\ , Ax \geq 0 \\ -x\ , Ax<0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)dx=\int_{-3}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{4} xdx=\left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[0+\frac{9}{2}\right]+\left[\frac{16}{2}-0\right]=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}$$

مثال – 14 –

اذا كانت : $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \forall x \geq 1 \\ 3\quad , \forall x<1 \end{cases}$ فأوجد

$$\int_{0}^{5} f(x)dx$$

الحل

f مستمرة على الفترة $[0,5]$ وذلك لانها :

مستمرة عند $x=1$ لأن :

(i) معرفة $f(1)=2(1)+1=3$

$$\text{(ii)}\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3=L_1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 3=3=L_2 \end{cases}$$

$\because L_1=L_2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ موجودة $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x : x > 1\}$, $\{x : x < 1\}$. وبما ان الدالة مستمرة على $[0,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx = \left[3x\right]_0^1 + \left[x^2 + x\right]_1^5$$

$$= \left[3-0\right] + \left[25+5\right] - \left[2\right] = 3 + 28 = 31$$

خامساً :

$$a)\int_a^a f = 0 \qquad b)\int_a^b f = -\int_b^a f$$

مثلاً :

$$a)\int_3^3 x\ dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

او اختصاراً وحسب القاعدة

$$\int_3^3 x\ dx = 0$$

$$b)\int_3^2 3\ x^2 dx = -\int_2^3 3x^2 dx$$

$$= -\left[x^3\right]_2^3$$

$$= -[27] + [8] = -19$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (3 - 4)

1. احسب كلاً من التكاملات الاتية :

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx$ b) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)dx$

c) $\int_{1}^{3}(x^4+4x)dx$ d) $\int_{0}^{2}[x-1]dx$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)dx$ f) $\int_{3}^{2}\frac{x^3-1}{x-1}dx$ g) $\int_{1}^{3}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$

2. أثبت أن F هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ حيث $F(x)=\sin x+x$

$f:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ حيث $f(x)=1+\cos x$ ثم احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}f$.

3. أوجد كلاً من التكاملات الاتية :

a) $\int_{1}^{4}(x-2)(x+1)^2dx$ b) $\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

c) $\int\frac{x^4-1}{x-1}dx$ d) $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2dx$

4. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & ,\forall x\geq 3\\ 6 & ,\forall x<3\end{cases}$ جد $\int_{1}^{4}f(x)dx$

5. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & ,\forall x\geq 0\\ 2x & ,\forall x<0\end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3}f(x)dx$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-6] التكامل غير المحدد : Indefinite Integral

عرفنا في النظرية الاساسية للتكامل أنه إذا كانت **f** دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة مقابلة F مستمرة على $[a,b]$ بحيث أن : $\forall x \in (a,b)$, $F'(x) = f(x)$

فمثلاً :

$F : [1,3] \to R$, $F(X) = X^2$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 2x$.

ولكن هل $F(x) = x^2$ دالة مقابلة وحيدة للدالة $F'(X) = 2X$ ؟

وقبل الاجابة عن هذا السؤال نتأمل الدوال الآتية :

1) $F_1 : [1,3] \to R$, $F_1(x) = x^2 + 1$

2) $F_2 : [1,3] \to R$, $F_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

3) $F_3 : [1,3] \to R$, $F_3(x) = x^2 - \sqrt{2}$

4) $F_4 : [1,3] \to R$, $F_4(x) = x^2 - 5$

اننا نلاحظ أن كلاً من F_4 , F_3 , F_2 , F_1 لها صفات F نفسها أي أنَّ كلاً منها :

(i) مستمرة على $[1,3]$

(ii) قابلة للاشتقاق على $(1,3)$

(iii) $\forall x \in (1,3)$, $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = F_4'(x) = 2x$.

وبناءاً على ذلك يمكن القول بان كلاً من : F_1 , F_2 , F_3 , F_4 دالة مقابلة الى **f** .

أي انه توجد اكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على $[1,3]$ والفرق بين أي دالتين مقابلتين للدالة **f** يساوي عدداً ثابتاً لاحظ أن :

$$F_1(x) - F_2(x) = (x^2 + 1) - (x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$F_1(x) - F_4(x) = (x^2 + 1) - (x^2 - 5) = 6$$ وهكذا

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وبصورة عامة

اذا كانت للدالة f المستمرة على [a,b] دالة مقابلة F فان يوجد عدد لانهائي من الدوال المقابلة للدالة f، كل منها تكون من الصورة : F + C حيث C عدداً ثابتاً والفرق بين أي إثنتين منها يساوي عدداً ثابتاً .

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي على الصورة F + C بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على [a,b] ويرمز لها بالرمز $\int f$ أو $\int f(x)dx$ إذا كان رمز المتغير x .

كما يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على الصورة :

$\int f = F + C$ او $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C \in R$ عدد ثابت

مثال – 1– أوجد $\int f(x)dx$ اذا علمت أن :

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = \cos x + x^{-2}$

c) $f(x) = x + \sec x \tan x$

d) $f(x) = \sin(2x + 4)$

الحل

a) $\int (3x^2 + 2x + 1)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$

b) $\int (\cos x + x^{-2})dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - \frac{1}{x} + c$

c) $\int (x + \sec x \tan x)dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$

d) $\int \sin(2x + 4)dx = \frac{-1}{2}\cos(2x + 4) + c$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 2–

جد التكاملات لكل مما يأتي :

a. $\int (x^2+3)^2(2x)dx$

الحل

لنفرض أن

$f(x)=x^2+3$

$\therefore f'(x)=2x$

$$\int (x^2+3)^2(2x)dx=\int [f(x)]^2 f'(x)dx=\frac{1}{3}[f(x)]^3+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+3)^3+c$$

b. $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx$

نفرض أن :

$f(x)=3x^2+8x+5 \Rightarrow f'(x)=6x+8$

$$\therefore \int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx=\frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6(6x+8)dx$$

$$\frac{1}{2}\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7+c$$

c. $\int \sin^4 x\cos x dx$

نفرض أن :

$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos x dx=\int [f(x)]^4 . f'(x)dx=\frac{[f(x)]^5}{5}+c=\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

d. $\int \tan^6 x\ \sec^2 x dx$

نفرض أن :

$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$

$$\therefore \int \tan^6 x\ \sec^2 x dx=\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{7}\tan^7 x+c$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1. $\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + c$

2. $\int \csc^2\theta \, d\theta = -\cot\theta + c$

3. $\int \tan^2\theta \, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^2\theta \, d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$

4. $\int \cot^2\theta \, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

5. $\int \sin^2\theta \, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{4}\int \cos 2\theta (2) d\theta$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

6. $\int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

أمثلة

جد تكاملات كل مما يأتي :

1. $\int 9\sin 3x dx = 3\int 3\sin 3x dx = -3\cos 3x + c$

2. $\int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3 dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

3. $\int \sqrt{1-\sin 2x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x} dx = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx$

$= \pm\int (\sin x - \cos x) dx = \pm(\cos x + \sin x) + c$

4. $\int \sin^4 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

5. $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

6. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

7. $\int \cos^3 x dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

9. $\int \sin 6x \cos^2 3x dx = \int (2\sin 3x \cos 3x)\cos^2 3x dx = 2\int \cos^3 3x \sin 3x dx$

$= \frac{-2}{3} \times \frac{\cos^4 3x}{4} + c = -\frac{1}{6}\cos^4 3x + c$

10. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$= \int (\cos 2x + \sin 2)dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

11. $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{12}\sin 6x + c$

12. $\int \cot^2 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + (x) + c$

13. $\int \tan^2 7x dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (4-4)

جد تكاملات كل مما يلي ضمن مجال الدالة :

1. $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx$
2. $\int \frac{(3-\sqrt{5}x)^7}{\sqrt{7x}}dx$
3. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$
4. $\int \csc^2 x \cos x \, dx$
5. $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx$
6. $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}dx$
7. $\int \sin^3 x dx$
8. $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$
9. $\int (3x^2+1)^2 dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$
11. $\int (1+\cos 3x)^2 dx$
12. $\int \sec^2 4x \, dx$
13. $\int \csc^2 x \, dx$
14. $\int \tan^2 8x \, dx$
15. $\int \cot^2 x \, dx$
16. $\int \cos^2 2x \, dx$
17. $\int \sin^2 8x \, dx$
18. $\int \cos^4 3x \, dx$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-7] اللوغارتم الطبيعي The Natural Logarithmic

درسنا دوالاً مألوفة نوعاً ما . فكثيرات الحدود والدوال النسبية وغيرها من الدوال الجبرية تنتج عن عمليات مألوفة في الحساب والجبر ، ويمكن مطابقة قيم الدوال المثلثية باحداثيات نقط على دائرة الوحدة . اما الان فندرس دالة اللوغارتم الطبيعي التي تعتمد على حساب التفاضل والتكامل حتى في تعريفها .

تعريف [4-1]

يعرَّف لوغارتم x الطبيعي ، ويرمز له بـ $(\ln x)$ بأنه :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad ; \quad \forall x > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

يمثل هذا التكامل لكل x اكبر من 1 ، المساحة المحدودة من الاعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الاسفل بالمحور t ، ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$

اي اذا كان $x = 1$ ، تطابق الحدان الايمن والايسر للمساحة واصبحت المساحة صفراً .

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 \qquad \left(\int_a^a f = 0\right)$$

اما اذا كانت x اصغر من 1 واكبر من الصفر فعندئذ يكون الحد الايسر هو المستقيم $t = x$ ، والحد الايمن هو $t=1$ وفي هذه الحالة يكون التكامل :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحني بين x و 1 .

* ينسب اول اكتشاف للوغاريتم الطبيعي الى النبيل الاسكتلندي John Napier (1550 - 1617)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

وفي كل الحالات ، x عدداً موجباً، فانه يمكن حساب قيمة التكامل المحدد في المعادلة (1) الى اي عدد نرغب فيه من الارقام العشرية كما مر بنا في حساب المساحة تحت المنحني بالتقريب .

وبما ان الدالة $F(x) = \ln x$ معرفة بالتكامل

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , \quad \forall x > 0$$

فانه من المبرهنة الاساسية لحساب التكامل في البند (4-4) نعلم ان : $F'(x) = \frac{1}{x}$

اي ان :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

كما يمكننا الحصول على صيغة أعم عندما يكون لدينا $\ln u$ حيث u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x

فقاعدة السلسلة للمشتقات (Chain Rule) تعطينا :

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d(\ln u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow d(\ln u) = \frac{1}{u}du$$

مثال – 1– اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2+4}\cdot\frac{d(3x^2+4)}{dx}$$

$$= \frac{6x}{3x^2+4}$$

ان الصيغة $d(\ln u) = \frac{1}{u}du$ تقودنا الى $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ وبشرط ان تكون u موجبة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 2 – جد $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\sin\theta}$

الحل

نفرض

$$u = 1+\sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln|1+\sin\theta| + c$$

[4–7–1] دالة اللوغارتم الطبيعي.

لتكن $y = \ln x$

لو ابدلنا x , y في مجموعة الازواج المرتبة :

$$\{(x,y) : y = \ln x \ , \ x > 0\}$$

لحصلنا على دالة نرمز لها

$$x = \ln^{-1}(y)$$

حيث

$$x = \ln y, \quad y > 0, \quad x \in R$$

ويكون مجال $\ln^{-1}(x)$ هو مدى $\ln(x)$

نتيجة : الدالة الأسية e^x (اساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي وتستنتج جميع خواصها من هذه الحقيقة.

مبرهنة [4–2]

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

البرهان

لتكن $y = e^x$

$\therefore x = \ln y \Rightarrow$

$1 = \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = y = e^x$

وبصورة عامة

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u.\frac{du}{dx}}$$

مثال – 3 لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{d(e^{\tan x})}{dx} = e^{\tan x}.\frac{d(\tan x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x}.\sec^2 x$$

ملاحظة

ان صيغة التفاضل $d\left(e^u\right) = e^u \frac{du}{dx}$ تقودنا الى صيغة التكامل : $\int e^u du = e^u + c$

مثال – 4 جد $\int xe^{x^2} dx$

الحل

نفرض ان : $x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$

$$\therefore \int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

تعريف (4 – 2)

ليكن a عددا موجباً ، اذن $a^u = e^{u\ln a}$

مبرهنة [4–3]

$$\frac{da^u}{dx} = a^u.\frac{du}{dx}\ln a$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

البرهان :

$$\frac{da^u}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{u\ln a}\right)$$

$$= e^{u\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(u \ln a)$$

$$\therefore \frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

مثال – 5– جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = 3^{2x-5}$ b) $y = 2^{-x^2}$ c) $y = 5^{\sin x}$

الحل

a) $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} \quad (2).\ln 3$

$$= (2\ln 3)\ e^{2x-5}$$

b) $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} \quad (-2x).\ln 2$

$$= \left(-2x \ln 2\right)(e^{-x^2})$$

c) $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \quad .\cos x\left(\ln 5\right)$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (4-5)

1 – جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \ln\left(x^2\right)$

d) $y = (\ln x)^2$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

j) $y = x^2e^x - xe^x$

2 – جد التكاملات الاتية :

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx$

e) $\int_0^1 \left(1+e^x\right)e^x dx$

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)^3}dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

j) $\int_{-1}^{1} |x-1|\,dx$

k) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

l) $\int_1^2 x\,e^{-\ln x}\,dx$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

3 – اثبت ان :

$$a)\int_0^{27}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=14 \qquad b)\int_{-2}^{4}|3x-6|dx=30$$

4 – $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة [6 و 2−] فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx=6$ وكان

$$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx=32$$ فجد $\int_{-2}^{1}f(x)dx$

5 – جد قيمة $a\in R$ اذا علمت أن $\int_1^a(x+\frac{1}{2})dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 xdx$

6 – لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k\in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (5−) جد $\int_1^3 f(x)dx$

7 – إذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_0^b f'(x)dx-\int_0^a f''(x)dx$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

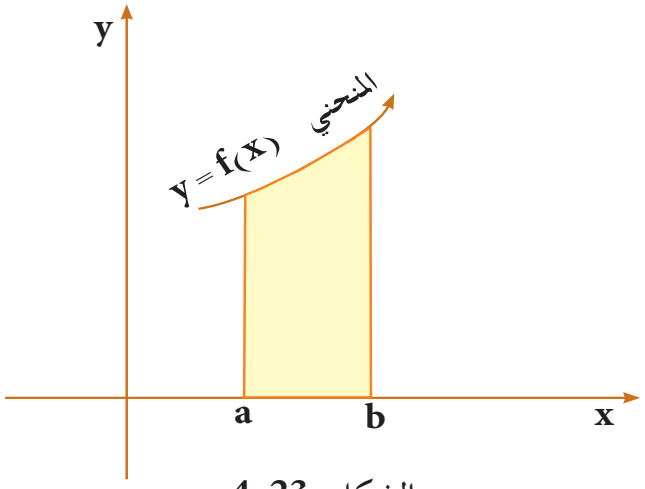
[4-8] إيجاد مساحة المنطقة المستوية.
Plane Area by Definite Integral

[4-8-1] مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات
The area between the x-axis and the Curve

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$:

اذا كانت $f(x) > 0$ فان المساحة A تساوي : $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت $f(x) < 0$ فان المساحة A تساوي : $A = -\int_a^b f(x)dx$



الشكل (4-23)

وعندما يقطع منحني الدالة $y=f(x)$ محور السينات في $x=b$ ، $x=a$ نتبع الخطوات الاتية :

خطوات ايجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة وقيم سالبة على الفترة $[a,b]$:

1. نجد النقاط عندما $f(x)=0$.
2. نستخدم قيم x التي تجعل $f=0$ كموقع على $[a,b]$ لتحصل على فترات جزئية من $[a,b]$.
3. نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية.
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3).

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 1–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

الحل

الخطوة الاولى : نجعل

$$f(x) = 0$$

$$\therefore x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad x = -2$$

الخطوة الثانية : فترات التكامل هي : $[-2,0]$ ، $[0,2]$

الخطوة الثالثة :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = [4 - 8] - 0 = -4$$

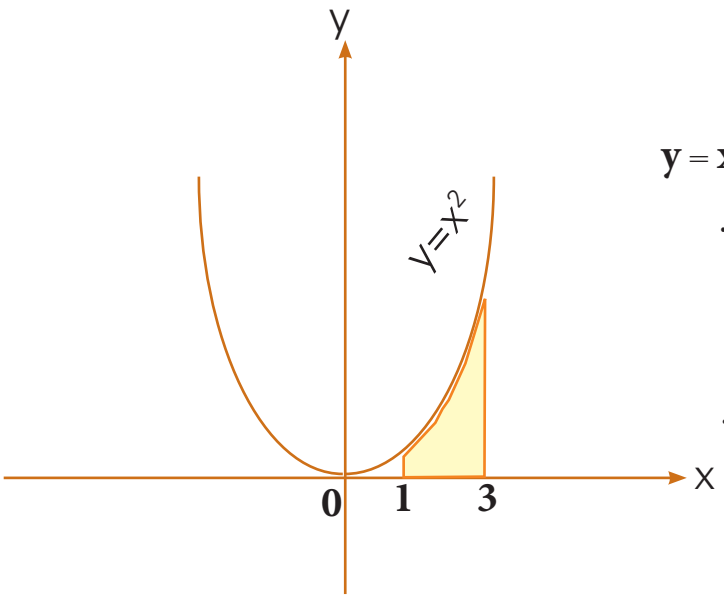
الخطوة الرابعة : جمع القيم المطلقة للتكاملات

$$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$$ وحدة مربعة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 2–

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3 , x = 1$.



الشكل (4–24)

الحل

نقاطع الدالة مع محور السينات بجعل $y = 0$.

$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

$\therefore$ لا تجزئة لفترة التكامل

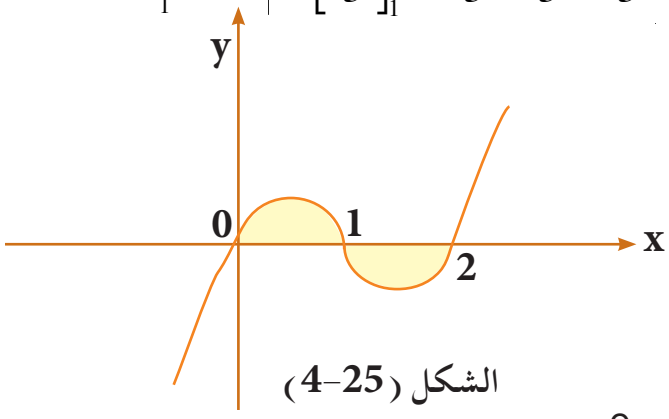
$\because f(x) \geq 0 , \ x \in [1,3]$

$$A = \int_1^3 x^2 dx \Big| = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

وحدة مساحة

مثال – 3–

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.



الشكل (4–25)

الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$

$\therefore$ فترات التكامل هنا : $[0,1]$ ، $[1,2]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$A_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

مثال – 4–

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل

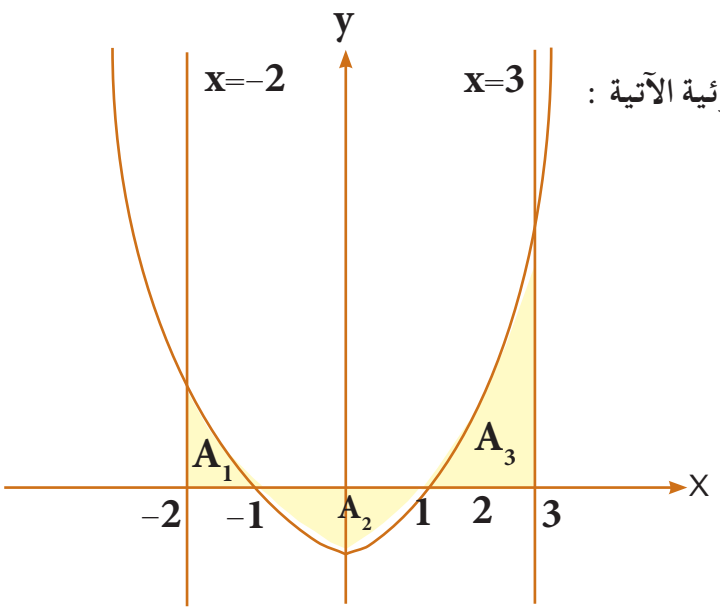
نجد تقاطع المنحني مع محور السينات

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

∴ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية :

$[-2,-1]$ ، $[-1,1]$ ، $[1,3]$



الشكل (4–26)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} + 1\right] - \left[-\frac{8}{3} + 2\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{3} - 1\right] - \left[-\frac{1}{3} + 1\right] = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$

$$A_3 = [9 - 3] - [\frac{1}{3} - 1] = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

نجمع القيم المطلقة للتكاملات :

$$\therefore A = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = 9\ \frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 5–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلي الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات وعلى الفترات $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$\because \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \ , n \in 1$

$\therefore$

$n = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

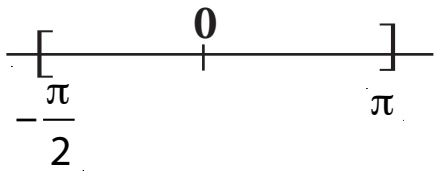
$n = 1 \Rightarrow x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

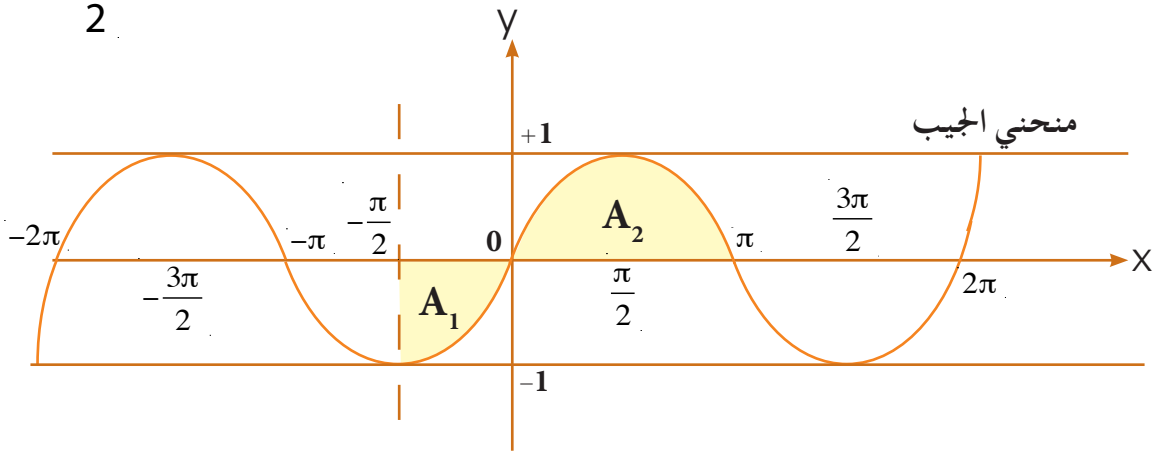
$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$n = -1 \Rightarrow x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$n = -2 \Rightarrow x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\therefore$ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية :





الشكل (4–27)

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

ثم نجد التكامل كما يأتي :

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos(0) + \cos(-\frac{\pi}{2})$$

$A_1 = -1+0 = -1$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{0}^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$$

$A_2 = 1+1=2$

$A = |A_1|+|A_2|$

$\therefore A = |-1|+|2| \Rightarrow A = 3$ وحدة مساحة

مثال – 6–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in I$$

$$\therefore \quad n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

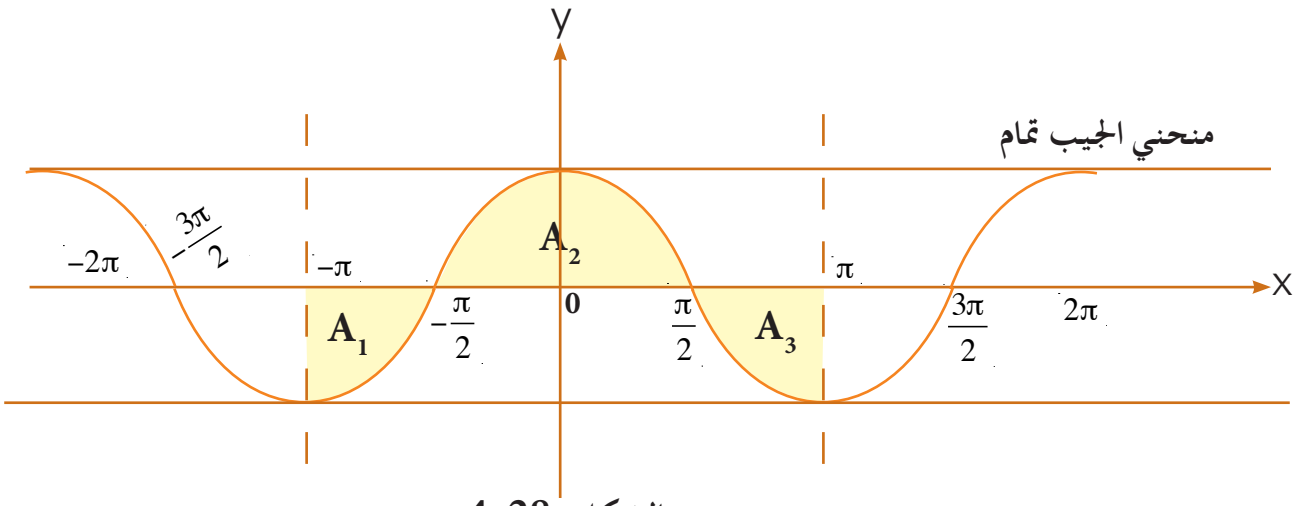
$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

$$n = -2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية

$$[-\pi, -\frac{\pi}{2}], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb



الشكل (4-28)

نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

نجد مجموع القيم المطلقة للتكاملات : $A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

$$A = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$$ وحدة مساحة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-8-2] مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

سبق وأن درسنا كيفية أيجاد المساحة بين منحني دالة ومحور السينات ومستقيمين والآن سندرس كيفية إيجاد مساحة المنطقة المحصور بين منحنيين :

لتكن $g(x), f(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان مساحة المنطقة A المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي :

1) اذا كان $f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

2) اذا كانت $f(x) < g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = -\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

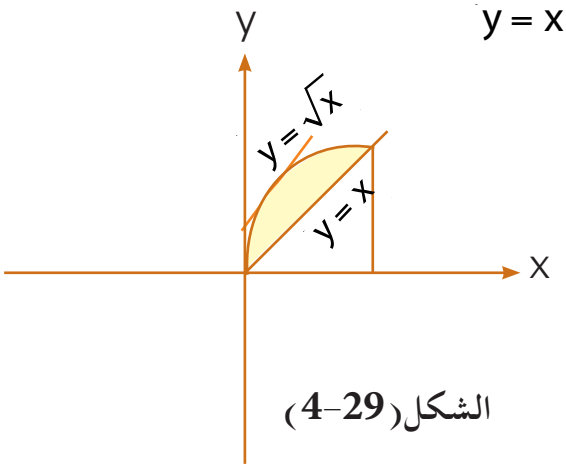
3) اذا تقاطع المنحنيان بين $[a,b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم x التي تنتمي الى (a,b) ونجزئة $[a,b]$ الى فترات جزئية ثم نجد تكامل الفرق بين الدالتين في كل فترة جزئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة .

مثال - 1 -

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

الحل

نجد تقاطع المنحنيين : $\sqrt{x} = x$



الشكل (4-29)

$$\therefore x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1 \Rightarrow x \in [0,1]$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{6}$$

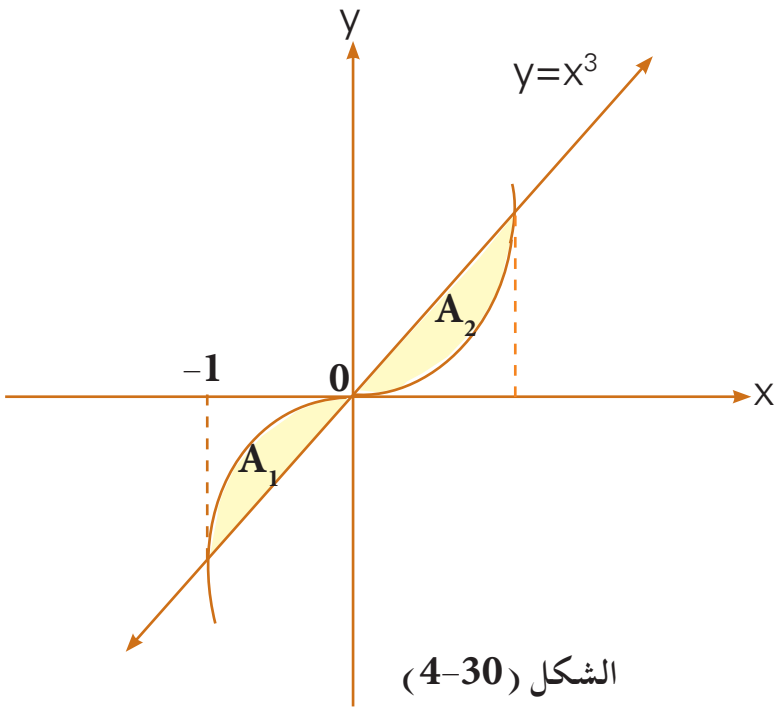
$$\therefore A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} \text{ وحدة مساحة}$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 2–

جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل



الشكل (4–30)

تقاطع الدالتين

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \Rightarrow [-1,0],[0,1]$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\right| + \left|(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0)\right| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 3–

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$ $g(x) = \sin x,$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل

$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$ تقاطع الدالتين

$$\therefore x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$\therefore$ نجزئ التكامل $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = |A_1| + |A_2|$

$$\therefore A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dxi\right|$$

$$= \left|\left[\sin x + \cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\sin x + \cos x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2})\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})\right|$$

$A = \left|\sqrt{2}+1\right| + \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-8-3] The Distance المسافة

لتكن $V(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ فأن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)| dt$$

حيث d تمثل المسافة، المسافة كمية غير متجهة أما الازاحة والسرعة والتعجيل فان كلاً منها كمية متجهة لذا فان الازاحة (S) :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\ dt$$

مثال – 1–

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4 \ m/s$

فجد :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

b) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

الحل

من الواضح أن الجسم يغير اتجاهه a)

$$\therefore 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3] \Rightarrow [1,2],[2,3]$$

$$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right| = \left|\left[t^2 - 4t\right]_1^2\right| + \left|\left[t^2 - 4t\right]_2^3\right|$$

$$= |(4-8)-(1-4)| + |(9-12)-(4-8)| = 1+1 = 2m$$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

b) $s=\int_1^3(2t-4)dt=[t^2-4t]_1^3=[9-12]-[1-4]=0$

c) $d=\left|\int_4^5(2t-4)dt\right|=\left|[t^2-4t]_4^5\right|=\left|[25,20]-[16-16]\right|=5m$

d) $s=\int_0^4(2t-4)dt=[t^2-4t]_0^4=[16-16]-[0]=0$

مثال – 2–

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)m/sec^2$ فأذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)m/s$ بعد مرور 4 ثواني من بد الحركة جد :

a) المسافة خلال الثانية الثالثة

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

الحل

a) $V=\int a(t)dt\Rightarrow v=\int 18dt$

$\therefore V=18t+c \qquad V=82, t=4$

$82=(18\times 4)+c\Rightarrow c=10$

$\therefore V=18t+10$

بما أن

$18t+10>0\Rightarrow t>0$

$\therefore d=\int_2^3(18t+10)dt=\left[9t^2+10t\right]_2^3=[81+30]-[36+20]=55m$

b) $S=\int_0^3(18t+10)dt=\left[9t^2+10t\right]_0^3=[81+30]-[0]=111m$

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (5-4)

1. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $X=-1$, $X=1$.

2. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحورالسينات .

3. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات .

4. جد المساحة المحددة بالمنحني $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

6. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x, y = \sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2,5]$

7. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2, y = x^4 - 12$.

8. جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = \sin x \cos x, f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0,2\pi]$

9. جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = \sin x, f(x) = 2\sin x + 1$ حيث $x \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

10. جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات .

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

11 . جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=\left(3t^2-6t+3\right)m/s$ إحسب :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

b) الازاحة في الفترة $[0,5]$

12 . جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90m/s$ إحسب :

a) السرعة عندما $t=2$

b) المسافة خلال الفترة $[1,2]$

c) الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

13 . تتحرك نقطة من السكون وبعد **t** ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $\left(100t-t^2\right)m/sec$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، ثم احسب التعجيل عندها

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

[4-8] الحجوم الدورانية: Volumes of Revolution

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من **x=a** الى **x=b** حول محور السينات

نطبق العلاقة التالية

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y= a$ الى $y=b$ حول محور الصادات

نطبق العلاقة التالية :

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

مثال – 1–

المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$ $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^4 \pi x dx$$

$$= \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$$ وحدة مكعبة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 2–

المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$ ، $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها

الحل

$$V = \int_1^4 \pi x^2 \, dy = \int_1^4 \frac{\pi}{y} dy = [\pi \ln y]_1^4 = \pi \ln 4 - 0 = 2\pi \ln 2$$ وحدة مكعبة

مثال – 3–

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيم $x=2$ حول المحور السيني .

الحل

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi \left[x^2\right]_0^2 = 16\pi$$ وحدة مكعبة

مثال – 4–

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 0, x = 5$ حول المحور السيني .

الحل

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^5 4x^4 dx = \frac{4\pi}{5} \left[x^5\right]_0^5$$

$$= \frac{4\pi}{5} \times 625 = 2500\pi$$ وحدة مكعبة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

مثال – 5–

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيم $y=16$ حول المحور الصادي.

الحل

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \frac{\pi}{8}\left[y^2\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}[16 \times 16] = 32\pi$$ وحدة مكعبة

مثال – 6–

اوجد حجم المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1, y = 2$ ومحور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi - \left[\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb

تمارين (6-4)

1. اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني.

2. اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

3. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي.

4. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

تم تحميل هذا الكتاب من منتديات يا حسين - منتدى الطلبة
http://www.yahosein.com/vb