

الفصل السادس

Chapter Six

Space Geometry الهندسة الفضائية

تمهيد	[6-1]
الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.	[6-2]
العلاقة بين ثلاثة مستويات.	[6-3]
الاسقاط العمودي	[6-4]
المجسمات	[6-5]

[1-6] تمهيد.

سبق وان علمنا أن كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقط وأن كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً وواحداً فقط وكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستويًا واحداً فقط، وكل اربعة نقط لا تقع في مستو واحد تعين فضاء. اي أن المستقيم يحتوي على نقطتين على اقل تقدير، والمستوي يحتوي على ثلاث نقط على اقل تقدير لا يحتويها مستقيم واحد، والفراغ يحتوي على اربع نقط على اقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.

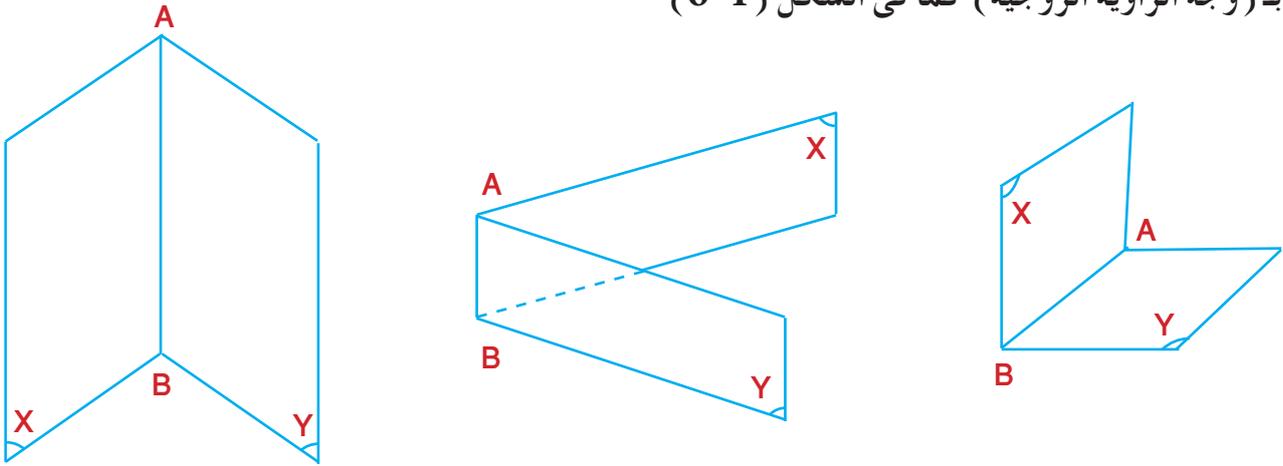
كما تعرفنا في الصف الخامس العلمي على علاقات بين المستقيمت والمستويات وبرهنا بعض المبرهنات التي يمكن الافادة منها في مبرهنات جديدة ستتعرف عليها في هذا الفصل. ولكي تتمكن من التواصل معنا وتتعرف على علاقات جديدة بين المستقيمت والمستويات، والمستويات والمستويات وتكتسب مفاهيم جديدة وتبرهن مبرهنات اخرى ما عليك الا الرجوع الى مراجعة ما درسته في هذا الموضوع في السنة السابقة.

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

تعريف [6-1]

الزاوية الزوجية: اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة.

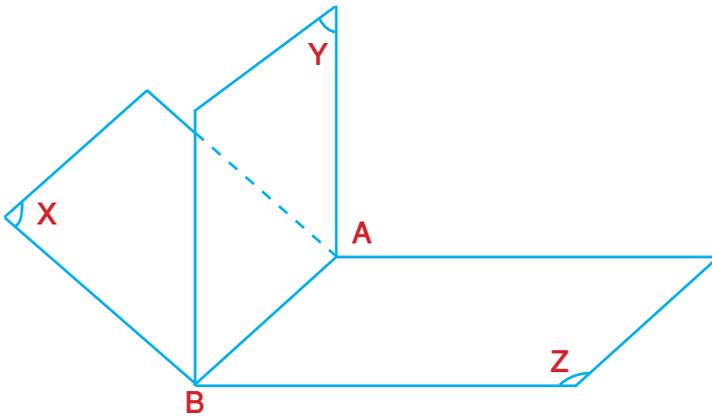
تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية Edge of Dihedral) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (6-1)



الشكل (6-1)

حيث \overleftrightarrow{AB} هو حرف الزاوية الزوجية و (X) و (Y) هما وجهها
 ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير: $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$
 وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى.
 مثلاً:

الزاوية الزوجية



$$\overleftrightarrow{AB} - (X) - (Z)$$

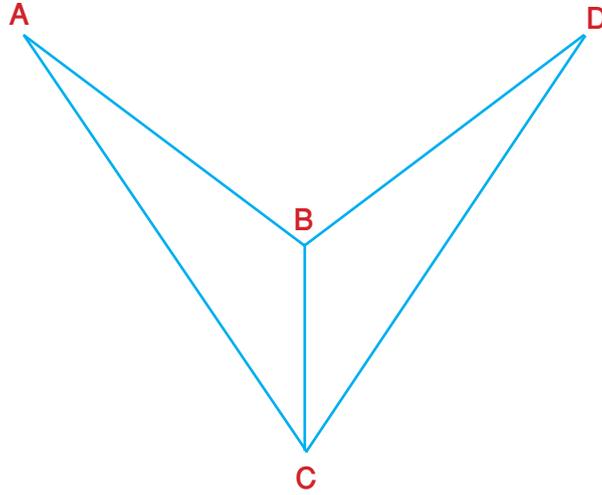
$$\overleftrightarrow{AB} - (X) - (Y)$$

$$\overleftrightarrow{AB} - (Y) - (Z)$$

الشكل (6-2)

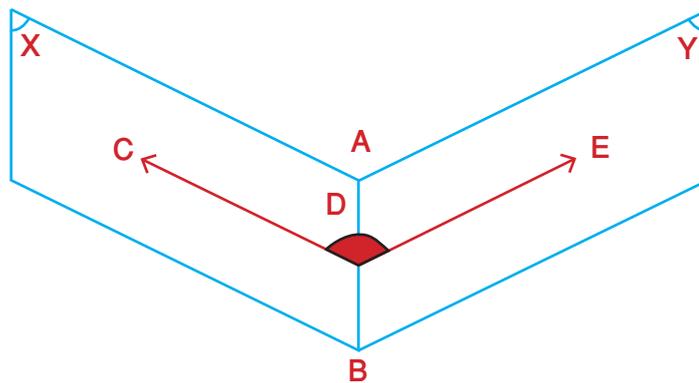
ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل \overleftrightarrow{AB} في هذا المثال لأن الحرف \overleftrightarrow{AB} مشترك في اكثر من زاوية زوجية.

عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوي واحد، نكتب
 الزوايا الزوجية $A - \overleftrightarrow{B} C - D$ او الزوايا الزوجية
 بين المستويين (ABC) , (DBC) . كما في الشكل (6-3)



الشكل (6-3)

وتقاس الزوايا الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة \overleftrightarrow{AB} ونرسم من D العمود \overleftrightarrow{DC} في (X) والعمود \overleftrightarrow{DE} في (Y) على الحرف \overleftrightarrow{AB} فيكون قياس الزوايا الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية. (كما في الشكل (6-4))



الشكل (6-4)

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$\overleftrightarrow{AB} - (X) - (Y)$$

$$\vec{DC} \subset (X), \vec{DE} \subset (Y)$$

$$\vec{DC} \perp \vec{AB}, \vec{DE} \perp \vec{AB}$$

$\angle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية AB او $(X) - AB - (Y)$

تعريف [6-2]

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية: هي الزاوية التي ضلعها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية أو هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية

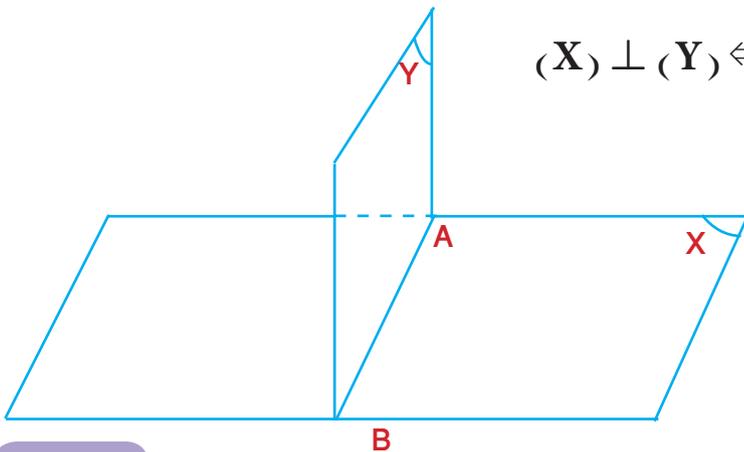
ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي

- (1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت
- (2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف [6-3]

إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فان المستويين متعامدان وبالعكس

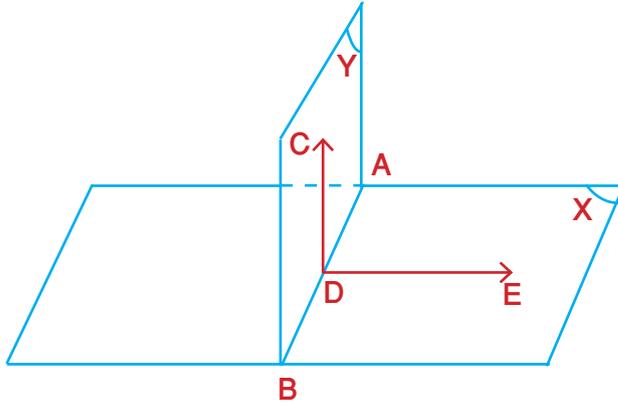
$$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow (X) - AB - (Y) = 90^\circ$$



الشكل (6-5)

مبرهنة (7):

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



أي أنه:

إذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فإن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

في نقطة D $(X) \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

(معطى) $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \angle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m \angle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فإن المستقيمين متعامدان وبالعكس)

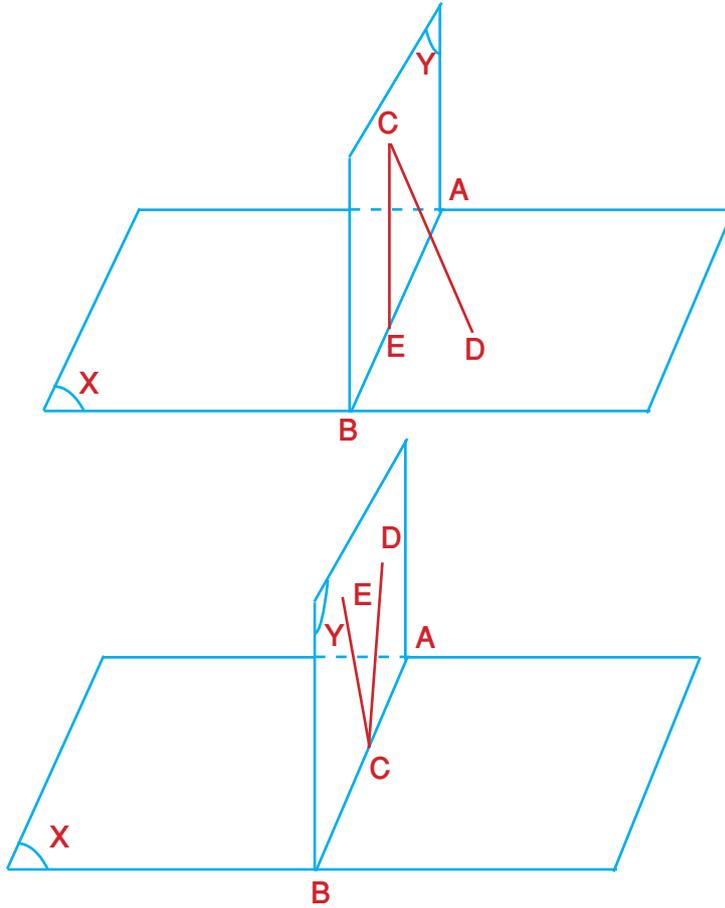
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها يكون عمودياً على مستويهما)

و.ه.م

نتيجة مبرهنة (7):

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوي فيه.

اي انه:



$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

مبرهنة (8):

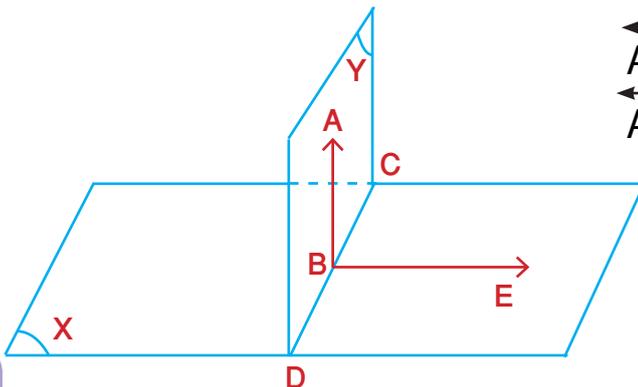
كل مستوي مار بمستقيم عمودي على مستوي آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

اي انه:

$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$

المعطيات:

$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \end{array} \right\}$$



المطلوب اثباته:

$$(Y) \perp (X)$$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \therefore$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE} \therefore$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمتان

المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \therefore$ (معطى)

$\angle ABE \therefore$ عائدة للزاوية الزوجية \overleftrightarrow{CD} (تعريف الزاوية العائدة)

$m \angle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

\therefore قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية

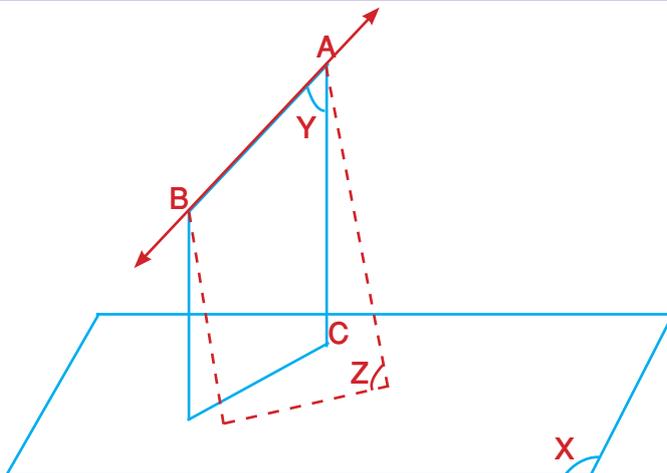
العائدة لها وبالعكس)

$(Y) \perp (X) \therefore$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و.ه.م

مبرهنة (9):

من مستقيم غير عمودي على مستوي معلوم يوجد مستوي وحيد عمودي على المستوي المعلوم.



اي انه:

\overleftrightarrow{AB} غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي \overleftrightarrow{AB}

وعمودي على (X)

المعطيات:

\overleftrightarrow{AB} غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيدٍ يحوي \overleftrightarrow{AB} وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

\therefore يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)
 $\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

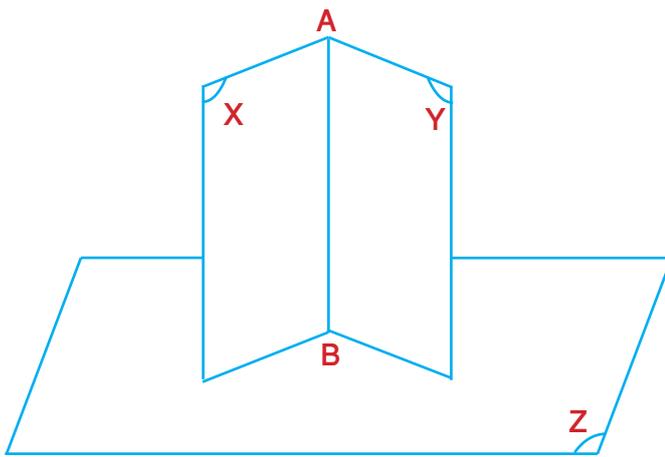
ليكن (Z) مستوي اخر يحوي \overleftrightarrow{AB} وعمودي على (X)
 $\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore (Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) **و.ه.م**

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

ان لم يكن \overleftrightarrow{AB} عمودياً على (Z)

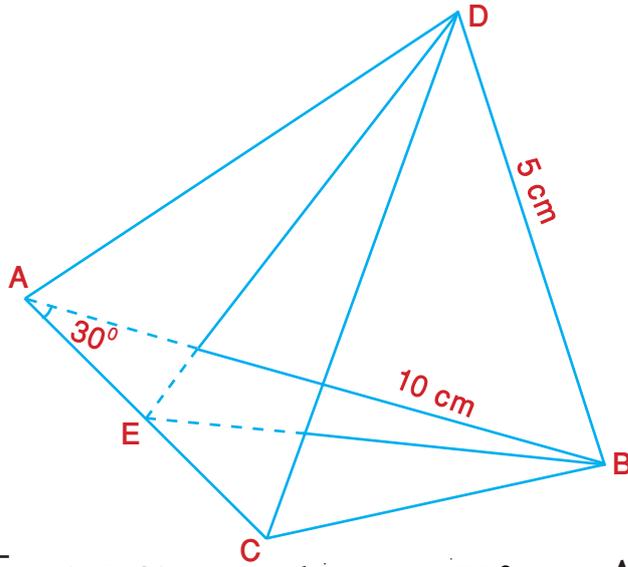
لما وجد اكثر من مستوي يحوي \overleftrightarrow{AB} وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

و.ه.م

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

نشاط: توجد طرق اخرى لبرهان هذه المبرهنة ، حاول ذلك.

مثال - 1



في $\triangle ABC$

$$\overline{BD} \perp (ABC), m\angle A = 30^\circ$$

$$AB = 10 \text{ cm}, BD = 5 \text{ cm}$$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$$\overline{BD} \perp (ABC), m\angle BAC = 30^\circ, AB = 10 \text{ cm}, BD = 5 \text{ cm}$$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$$\therefore \overline{BD} \perp (ABC) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC} \text{ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)}$$

$$\angle DEB \leftarrow \text{عائدة للزاوية الزوجية } \overline{AC} \text{ (تعريف الزاوية العائدة)}$$

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمت المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$$\triangle DBE \leftarrow \text{قائم الزاوية في } B$$

$$\text{في } \triangle BEA \text{ القائم الزاوية في } E$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5 \text{ cm}$$

$$\tan \angle BED = \frac{5}{5} = 1$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

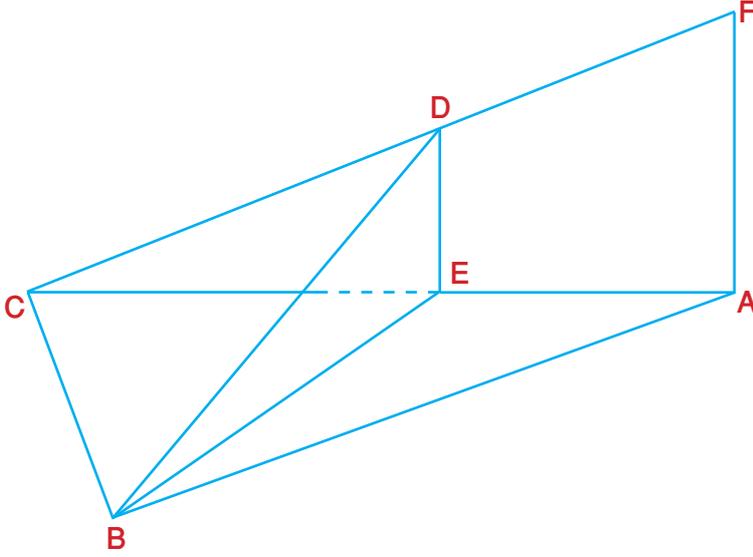
$$\therefore \text{قياس } \angle BED = 45^\circ$$

\therefore قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة

لها وبالعكس)

و.ه.م

مثال - 2



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$$\overline{AF} \perp (ABC)$$

$$\overline{BD} \perp \overline{CF}$$

$$\overline{BE} \perp \overline{CA}$$

برهن ان:

$$\overline{BE} \perp (CAF)$$

$$\overline{ED} \perp \overline{CF}$$

المعطيات:

$$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$$

المطلوب اثباته:

$$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$$

البرهان:

$$\overline{AF} \perp (ABC) \quad \therefore \text{(معطى)}$$

$(CAF) \perp (ABC) \therefore$ (مبرهنة 8) يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على

(الآخر)

$$\overline{BE} \perp \overline{CA} \quad \therefore \text{(معطى)}$$

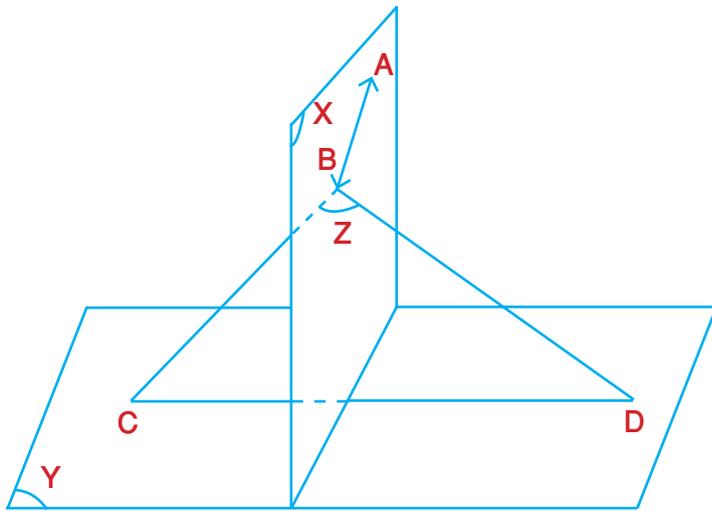
$\overline{BE} \perp (CAF) \therefore$ (مبرهنة 7) اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على

مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر (

$$\overline{BD} \perp \overline{CF} \quad \therefore \text{(معطى)}$$

$$\overline{ED} \perp \overline{CF} \therefore \text{(نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)}$$

و.ه.م



(X), (Y) مستويان متعامدان

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \text{ عموديان على } \overleftrightarrow{AB}$$

ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب

برهن ان:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

المعطيات:

ان $(X) \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديين على \overleftrightarrow{AB} ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستويًا وحيداً يحويهما)

$$\text{بما ان } \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \text{ (معطى) } \\ \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore (X) \perp (Z) \text{ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)}$$

$$\therefore (X) \perp (Y) \text{ (معطى)}$$

$$\text{ولما كان } (Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD} \text{ (لانه محتوى في كل منهما)}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوي ثالث فان مستقيمي تقاطعهما يكون عمودياً على

المستوي الثالث)

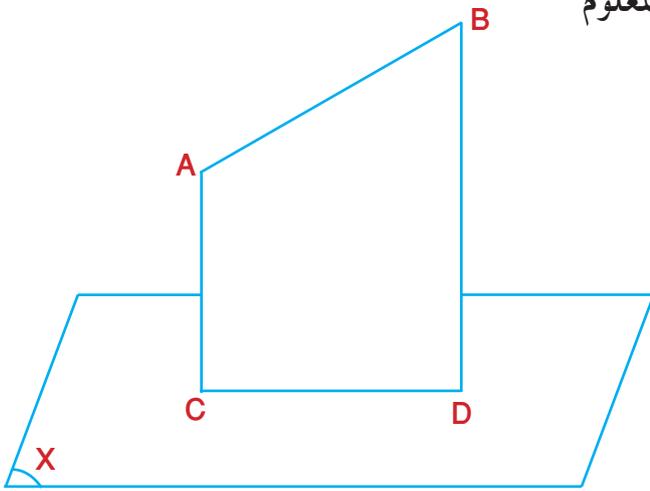
و.ه.م

تمارين (1-6)

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .
2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .
3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .
4. A, B, C, D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\angle AED < \angle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - BC - D$ برهن ان $CD = BD$.
5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .
6. دائرة قطرها \overline{AB} ، \overline{AC} عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .

(3-6) الإسقاط العمودي على مستوي The Orthogonal Projection on a Plane

- (1) **مسقط نقطة على مستوي:** هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.
- (2) **مسقط مجموعة نقط على مستوي:** لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .
- (3) **مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي معلوم:** هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن AB غير عمودي على (X) وليكن

$$\overline{AC} \perp (X) \leftarrow \text{مسقط } A \text{ على } (X) \text{ هو } C$$

$$\overline{BD} \perp (X) \leftarrow \text{مسقط } B \text{ على } (X) \text{ هو } D$$

$$\therefore \text{مسقط } \overline{AB} \text{ على } (X) \text{ هو } \overline{CD}$$

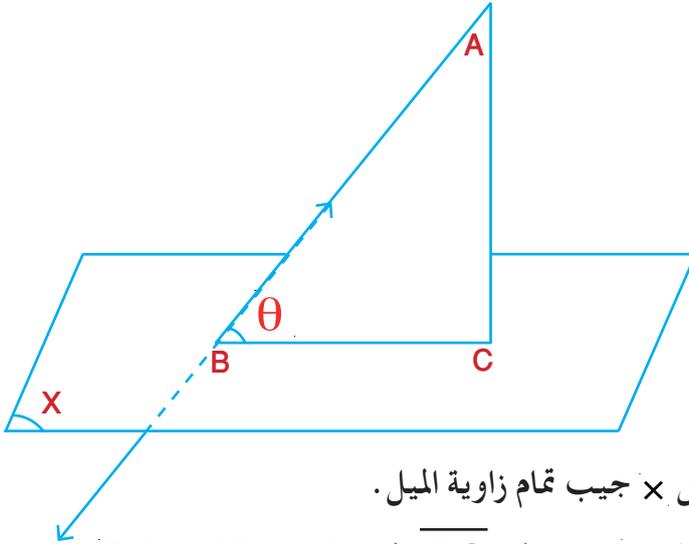
ملاحظة اذا كان $\overline{AB} \parallel (X)$

$$\text{فان } AB = CD$$

- (4) **الستقيم المائل (Inclined Line) على مستوي:** هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له
- (5) **زاوية الميل (Angle of Inclination):** هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن \overleftrightarrow{AB} مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C



∴ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

← \overline{BC} مسقط \overline{AB} على (X)

اي ان $0 < \theta < 90^\circ$

$\theta \in (0, 90^\circ)$

(6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوي = طول المائل \times جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون \overline{AB} مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه \overline{BC} فان $BC = AB \cos \theta$

(7) مسقط مستوي مائل (Inclined Plane) على (X)

زاوية ميل مستوي على مستوي معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوي معلوم = مساحة المنطقة المائلة \times جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $A' = A \cdot \cos \theta$

مثال - 4

اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستويًا معلومًا فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.

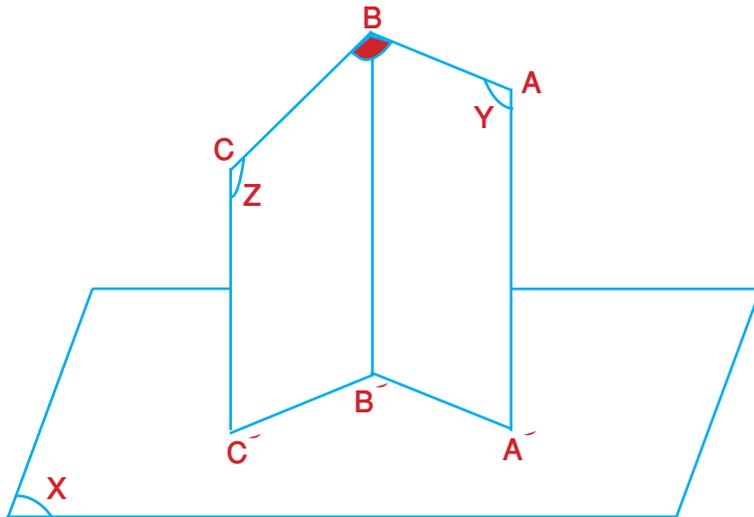
المعطيات:

$\triangle ABC$ قائمة في B

$\overline{AB} \parallel (X)$

$\overline{A'B'}$ هو مسقط \overline{AB} على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط \overline{BC} على (X)



المطلوب اثباته:

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

$$\text{معطى} \begin{cases} \overline{AB} \text{ مسقط } \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \text{ مسقط } \overline{B'C'} \end{cases}$$

$\overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'} \perp (X) \Leftrightarrow$ (مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين

المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\overline{BB'} // \overline{CC'}, \overline{AA'} // \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين AA', BB' نعين (Y) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحتويهما)
بالمستقيمين المتوازيين BB', CC' نعين (Z)

لكن $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

(يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$$(Y) \cap (X) = A'B'$$

إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فإنه يوازي جميع المستقيمت الناتجة

$$\overline{AB} // \overline{A'B'} \Leftrightarrow$$

من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمت

$$\overline{BB'} \perp \overline{A'B'} \text{ كذلك}$$

المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

(في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين

$$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$$

يكون عمودياً على الآخر)

(لان $\angle ABC = 90^\circ$ معطى M)

$$\overline{AB} \perp \overline{BC} \text{ لكن}$$

(المستقيم العمودي على مستقيمن متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون

$$\overline{AB} \perp (Z)$$

عمودياً على مستوييهما)

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

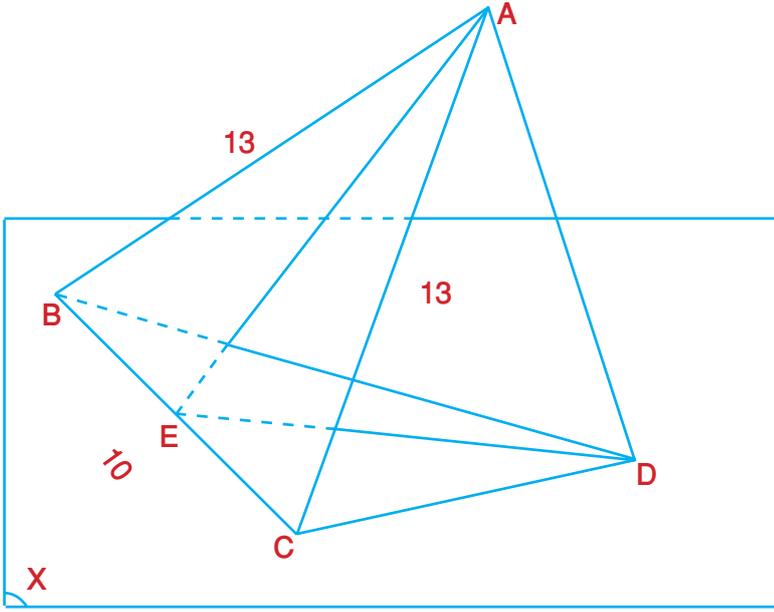
$$\overline{A'B'} \perp (Z) \Leftrightarrow$$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمت

$$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'} \therefore$$

المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و.ه.م



$\overline{BC} \subset (X)$ ، مثلث ABC

والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث

ABC والمستوي (X)

قياسها 60° فاذا كان

$AB = AC = 13\text{cm}, BC = 10\text{cm}$

جد مسقط المثلث (ABC) على (X)

ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات:

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $\overleftrightarrow{ABC} - \overleftrightarrow{BC} - (X) = 60^\circ$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان:

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D

(يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

(مسقط قطعة مستقيم على مستوي معلوم هو القطعة المحددة بأثري

العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{CD} \text{ مسقط } \overline{AC} \\ \overline{BD} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{BC} \text{ مسقط نفسه على } (X) \end{array} \right.$$

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من

نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5\text{cm}$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

(نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$$\overline{ED} \perp \overline{BC} \therefore$$

(تعريف الزاوية العائدة)

$$\overline{BC} \text{ عائدة للزاوية } \angle DEA \therefore$$

(معطى)

$$60^\circ = \overline{BC} \text{ لكن قياس الزاوية الزوجية}$$

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\text{cm}$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60^\circ = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6\text{cm}$$

$$\text{مساحة المثلث BCD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\text{cm}^2$$

و.ه.م

ملاحظة

لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالآتي:

$$\text{مساحة BCD} = \text{مساحة } ABC \times \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times (12 \times 10 \times \frac{1}{2}) = 30\text{cm}^2$$

و.ه.م

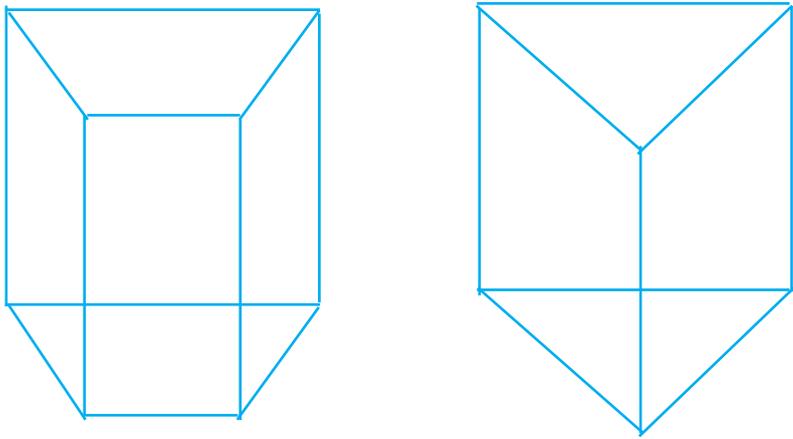
تمارين (2-6)

1. برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه.
2. برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .
3. برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه
4. برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .
5. برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الأطول .
6. برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستو اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .

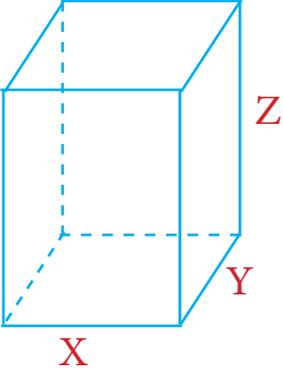
[4-6] المجسمات (Solid)

سبق للطالب دراسة المجسمات في المرحلة المتوسطة ونلخص فيما يلي قوانين الحجوم والمساحات الجانبية والكلية لبعض المجسمات علماً ان الحديث عن حجم مجسم نقصد به حجم المنطقة في الفراغ (الفضاء) الواقعة داخل المجسم.

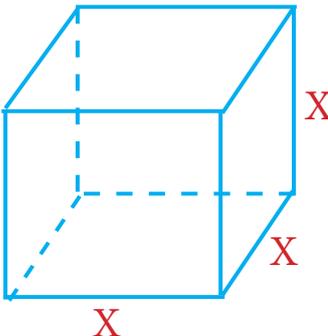
(1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

	<p>الرسم Diagram</p>
<p>مساحة القاعدة \times الارتفاع</p>	<p>الحجم Volume</p>
<p>مجموع مساحات الواجه الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع</p>	<p>المساحة الجانبية Lateral Area</p>
<p>المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين</p>	<p>المساحة الكلية Total Area</p>

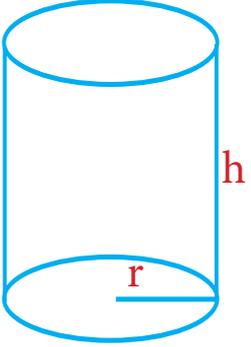
(2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)

	الرسم Diagram
$V = x y z$	الحجم Volume
$L. A = 2(x + y)z$	المساحة الجانبية Lateral Area
$T. A = 2(x + y)z + 2xy$	المساحة الكلية Total Area

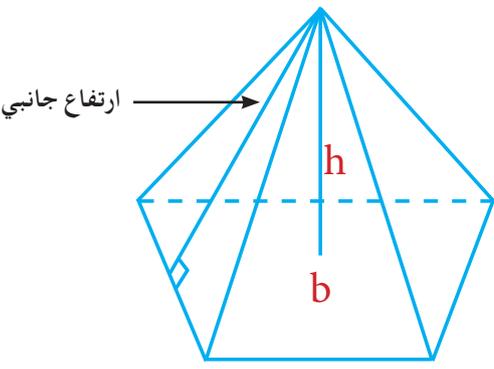
(3) المكعب (Cube)

	الرسم Diagram
$V = x^3$	الحجم Volume
$L. A = 4x^2$	المساحة الجانبية Lateral Area
$T. A = 6x^2$	المساحة الكلية Total Area

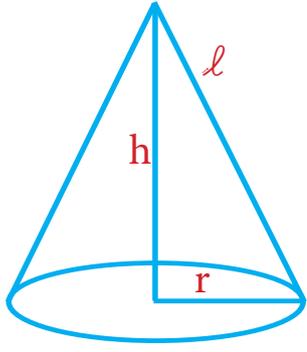
(4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

	<p>الرسم Diagram</p>
$V = \pi r^2 h$	<p>الحجم Volume</p>
$L.A = 2\pi r h$	<p>المساحة الجانبية Lateral Area</p>
$T.A = 2\pi r h + 2\pi r^2$	<p>المساحة الكلية Total Area</p>

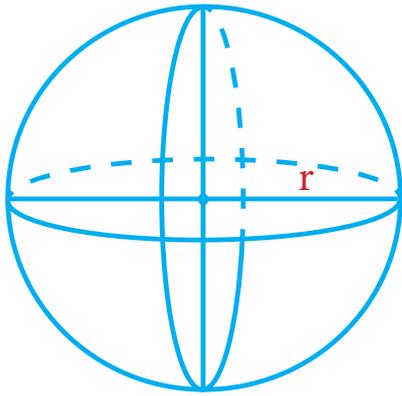
(5) الهرم (Pyramid)

	<p>الرسم Diagram</p>
<p>مساحة القاعدة : b الارتفاع : h</p> $V = \frac{1}{3} b h$	<p>الحجم Volume</p>
$L.A = \frac{1}{2} \times (\text{محيط القاعدة}) \times \text{طول الارتفاع الجانبي}$	<p>المساحة الجانبية Lateral Area</p>
$T.A = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدة}$	<p>المساحة الكلية Total Area</p>

(6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)

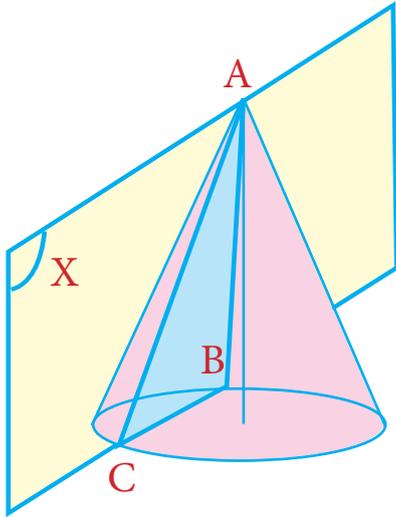
	<p>الرسم Diagram</p>
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	<p>الحجم Volume</p>
$L.A = \pi r l$	<p>المساحة الجانبية Lateral Area</p>
$T.A = \pi r l + \pi r^2$	<p>المساحة الكلية Total Area</p>

(7) الكرة (Sphere)

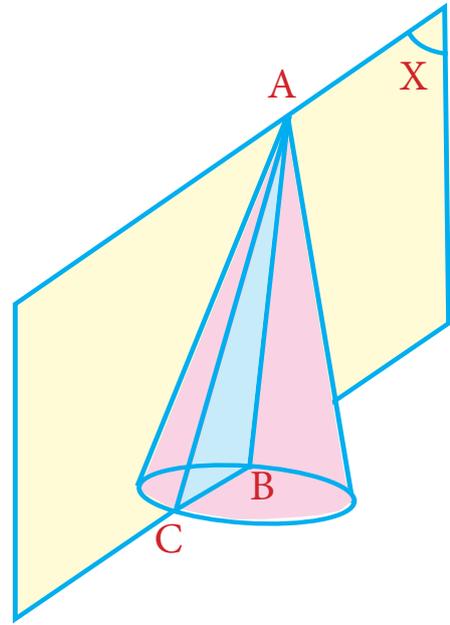
	<p>الرسم Diagram</p>
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	<p>الحجم Volume</p>
<p>مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$</p> $S = 4\pi r^2$	<p>مساحة سطح الكرة</p>

ملاحظة

- (1) ذو الوجوه الاربعة المنتظم: هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة
- (2) اذا قطع المخروط الدائري بمستوي مار من احد مولداته فان المقطع مثلث ويكون المثلث في المخروط الدائري القائم متساوي الساقين



مخروط دائري قائم
 $AC = AB \Leftarrow$



مخروط دائري مائل
 $AC \neq AB \Leftarrow$

تمارين (3-6)

1. اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = 724cm^2 ومساحة قاعدته = 132cm^2 ومساحة احد اوجهه الجانبية = 110cm^2 جد ابعاده وحجمه .

2. اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\text{cm}^2$ وحجمها $2000\pi\text{cm}^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها .

3. اوجد حجم المادة المصنوع منها انبوب اسطواني طوله 100cm وقطره الخارجي = 8cm وسمك المادة المصنوع منها = 1cm

4. برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه = l هو $\frac{\sqrt{2} l^3}{12}$ وحدة مكعبة .

5. مخروط دائري قائم مرّ برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فاذا كانت مساحة المقطع = 102cm^2 وارتفاع المخروط = 15cm احسب :
 (1) حجمه (2) مساحته الجانبية (3) مساحته الكلية

6. كرة نصف قطرها 10cm قطعها مستو على بعد 4cm من مركزها . جد مساحة المقطع الحادث .

7. اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم .

برهن ان نصف قطر الكرة = $\frac{3}{4}$ الارتفاع .

تم بحمدہ تعالیٰ

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق ببغداد ٨٥٥ لسنة ٢٠١٠